Министерство науки и высшего образования РФ
Иркутский национальный исследовательский технический университет

Факультет среднего профессионального образования
Машиностроительный колледж

Ю.Н. Перетолчина

ОУП.03 МАТЕМАТИКА

Методические указания
по выполнению практических работ

Издательство
Иркутского национального исследовательского технического университета
2025 г.

Рекомендовано к изданию учебно – методической комиссией факультета среднего профессионального образования

Автор

Преподаватель машиностроительного колледжа факультета среднего-профессионального образования ФГБОУ ВО «ИРНИТУ» **Ю.Н. Перетолчина**

Перетолчина Ю.Н. ОУП.03п Математика: метод. указания по выполнению практических работ.-Иркутск : Изд-во ИРНИТУ, 2025.- 120 с.

Соответствуют требованиям ФГОС среднего профессионального образования по специальности 23.02.07 «Техническое обслуживание и ремонт автотранспортных средств».

Предназначены для студентов машиностроительного колледжа, изучающих предмет «Математика» в рамках подготовки специалистов среднего звена.

Введение

Методические указания составлены в соответствии с Федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования по специальности 23.02.07 «Техническое обслуживание и ремонт автотранспортных средств», федеральным государственным образовательным стандартом среднего общего образования.

Данные методические указания предназначены для обобщения, систематизации, углубления и закрепления полученных теоретических знаний, формирование умений и навыков по следующим темам учебного предмета:

- Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств;
- Свойства функций;
- Степенная, показательная, логарифмическая функции;
- Тригонометрические функции числового аргумента;
- Решение тригонометрических уравнений и неравенств;
- Производная функции;
- Применение производной к исследованию функции;
- Первообразная и интеграл;
- Перпендикулярность прямой и плоскостей;
- Параллельность прямой и плоскости;
- Изготовление многогранника;
- Цилиндр, конус, шар;
- Объемы тел;
- Векторы и метод координат.

Результатом освоения предмета является определенный этап сформированности следующих общих и профессиональных компетенций:

Код и наименование формируемых компетенций	**Планируемые результаты освоения предмета**	
	Общие	**Предметные**
ОК 01 Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности применительно к различным контекстам	- готовность к труду, осознание ценности мастерства, трудолюбие; - готовность к активной деятельности технологической и социальной направленности, способность инициировать, планировать и самостоятельно	-владеть методами доказательств, алгоритмами решения задач; умение формулировать определения, аксиомы и теоремы, применять их, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач; - уметь оперировать понятиями: степень числа, логарифм числа; умение выполнять вычисление значений и преобразования

	выполнять такую деятельность; - интерес к различным сферам профессиональной деятельности, Овладение универсальными учебными познавательными действиями: а) базовые логические действия: - самостоятельно формулировать и актуализировать проблему, рассматривать ее всесторонне; - устанавливать существенный признак или основания для сравнения, классификации и обобщения; - определять цели деятельности, задавать параметры и критерии их достижения; - выявлять закономерности и противоречия в рассматриваемых явлениях; - вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям, оценивать риски последствий деятельности; - развивать креативное мышление при решении жизненных проблем б) базовые исследовательские	выражений со степенями и логарифмами, преобразования дробно-рациональных выражений; - уметь оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы; - уметь оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; уметь находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения; - уметь оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных

	действия: - владеть навыками учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; - выявлять причинно-следственные связи и актуализировать задачу, выдвигать гипотезу ее решения, находить аргументы для доказательства своих утверждений, задавать параметры и критерии решения; - анализировать полученные в ходе решения задачи результаты, критически оценивать их достоверность, прогнозировать изменение в новых условиях; -- уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности; - уметь интегрировать знания из разных предметных областей; - выдвигать новые идеи, предлагать оригинальные подходы и решения; и способность их использования в познавательной и социальной практике	предметов и задач из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; - уметь решать текстовые задачи разных типов (в том числе на проценты, доли и части, на движение, работу, стоимость товаров и услуг, налоги, задачи из области управления личными и семейными финансами); составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать полученное решение и оценивать правдоподобность результатов; - уметь оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение числового набора; уметь извлекать, интерпретировать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства реальных процессов и явлений; представлять информацию с помощью таблиц и диаграмм; исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств; - уметь оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; умение вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении

		задач; оценивать вероятности реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях; - уметь оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов окружающего мира; - уметь оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных

		инструментов и электронных средств; умение распознавать симметрию в пространстве; умение распознавать правильные многогранники; - уметь оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач; - уметь вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и методы; - уметь оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками; - уметь выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки. - уметь оперировать понятиями: определение, аксиома, теорема, следствие, свойство, признак,

		доказательство, равносильные формулировки; умение формулировать обратное и противоположное утверждение, приводить примеры и контрпримеры, использовать метод математической индукции; проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность рассуждений; - уметь оперировать понятиями: множество, подмножество, операции над множествами; умение использовать теоретико-множественный аппарат для описания реальных процессов и явлений при решении задач, в том числе из других учебных предметов; - уметь оперировать понятиями: граф, связный граф, дерево, цикл, граф на плоскости; умение задавать и описывать графы различными способами; использовать графы при решении задач; - уметь свободно оперировать понятиями: сочетание, перестановка, число сочетаний, число перестановок; бином Ньютона; умение применять комбинаторные факты и рассуждения для решения задач; -уметь оперировать понятиями: натуральное число, целое число, остаток по модулю, рациональное число, иррациональное число, множества натуральных, целых, рациональных, действительных чисел; умение использовать признаки делимости,

		наименьший общий делитель и наименьшее общее кратное, алгоритм Евклида при решении задач; знакомство с различными позиционными системами счисления; - уметь свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа; - уметь оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; умение решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни; -уметь свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции,

		обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; умение строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; умение использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; умение свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции на промежутке; умение проводить исследование функции; умение использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем; - уметь свободно оперировать понятиями: последовательность, арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия; умение задавать последовательности, в том числе с помощью рекуррентных формул; - уметь оперировать понятиями: непрерывность функции,

		асимптоты графика функции, первая и вторая производная функции, геометрический и физический смысл производной, первообразная, определенный интеграл; умение находить асимптоты графика функции; умение вычислять производные суммы, произведения, частного и композиции функций, находить уравнение касательной к графику функции; умение использовать производную для исследования функций, для нахождения наилучшего решения в прикладных, в том числе социально-экономических и физических задачах, для определения скорости и ускорения; находить площади и объемы фигур с помощью интеграла; приводить примеры математического моделирования с помощью дифференциальных уравнений; - уметь оперировать понятиями: комплексное число, сопряженные комплексные числа, модуль и аргумент комплексного числа, форма записи комплексных чисел (геометрическая, тригонометрическая и алгебраическая); уметь производить арифметические действия с комплексными числами; приводить примеры использования комплексных чисел; - уметь свободно оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее

		значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение для описания числовых данных; умение исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств; графически исследовать совместные наблюдения с помощью диаграмм рассеивания и линейной регрессии; - уметь находить вероятности событий с использованием графических методов; применять для решения задач формулы сложения и умножения вероятностей, формулу полной вероятности, формулу Бернулли, комбинаторные факты и формулы; оценивать вероятности реальных событий; умение оперировать понятиями: случайная величина, распределение вероятностей, математическое ожидание, дисперсия и стандартное отклонение случайной величины, функции распределения и плотности равномерного, показательного и нормального распределений; умение использовать свойства изученных распределений для решения задач; знакомство с понятиями: закон больших чисел, методы выборочных исследований; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях; - уметь свободно оперировать понятиями: точка, прямая,

		плоскость, пространство, отрезок, луч, плоский угол, двугранный угол, трехгранный угол, пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями; умение использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение оценивать размеры объектов в окружающем мире; умение оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, правильный многогранник, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, развертка поверхности, сечения конуса и цилиндра, параллельные оси или основанию, сечение шара, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса; умение строить сечение многогранника, изображать многогранники, фигуры и поверхности вращения, их сечения, в том числе с помощью электронных средств; умение применять свойства геометрических фигур, самостоятельно формулировать определения изучаемых фигур, выдвигать гипотезы о свойствах и признаках геометрических фигур, обосновывать или опровергать их; умение проводить классификацию фигур по различным признакам,

		выполнять необходимые дополнительные построения; - уметь свободно оперировать понятиями: площадь фигуры, объем фигуры, величина угла, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями, площадь сферы, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение находить отношение объемов подобных фигур; - уметь свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; умение распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; умение использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; - уметь свободно оперировать понятиями: прямоугольная система координат, вектор, координаты точки, координаты вектора, сумма векторов, произведение вектора на число, разложение вектора по базису, скалярное произведение, векторное произведение, угол между векторами; умение использовать векторный и

		координатный метод для решения геометрических задач и задач других учебных предметов; оперировать понятиями: матрица 2x2 и 3x3, определитель матрицы, геометрический смысл определителя; - уметь моделировать реальные ситуации на языке математики; составлять выражения, уравнения, неравенства и их системы по условию задачи, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат; строить математические модели с помощью геометрических понятий и величин, решать связанные с ними практические задачи; составлять вероятностную модель и интерпретировать полученный результат; решать прикладные задачи средствами математического анализа, в том числе социально-экономического и физического характера; - умение выбирать подходящий метод для решения задачи; понимание значимости математики в изучении природных и общественных процессов и явлений; умение распознавать проявление законов математики в искусстве, умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки

ОК 02 Использовать современные средства поиска, анализа и интерпретации информации, и информационные технологии для выполнения задач профессиональной деятельности	В области ценности научного познания: -сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, основанного на диалоге культур, способствующего осознанию своего места в поликультурном мире; - совершенствование языковой и читательской культуры как средства взаимодействия между людьми и познания мира; - осознание ценности научной деятельности, готовность осуществлять проектную и исследовательскую деятельность индивидуально и в группе. Овладение универсальными учебными познавательными действиями: в) работа с информацией: - владеть навыками получения информации из источников разных типов, самостоятельно осуществлять поиск, анализ, систематизацию и интерпретацию информации различных видов и форм представления; - создавать тексты в различных форматах с	- уметь оперировать понятиями: рациональная функция, показательная функция, степенная функция, логарифмическая функция, тригонометрические функции, обратные функции; умение строить графики изученных функций, использовать графики при изучении процессов и зависимостей, при решении задач из других учебных предметов и задач из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; - уметь оперировать понятиями: тождество, тождественное преобразование, уравнение, неравенство, система уравнений и неравенств, равносильность уравнений, неравенств и систем, рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения, неравенства и системы; уметь решать уравнения, неравенства и системы с помощью различных приемов; решать уравнения, неравенства и системы с параметром; применять уравнения, неравенства, их системы для решения математических задач и задач из различных областей науки и реальной жизни; - уметь свободно оперировать понятиями: движение, параллельный перенос, симметрия на плоскости и в пространстве, поворот, преобразование подобия, подобные фигуры; уметь

	учетом назначения информации и целевой аудитории, выбирая оптимальную форму представления и визуализации; - оценивать достоверность, легитимность информации, ее соответствие правовым и морально-этическим нормам; - использовать средства информационных и коммуникационных технологий в решении когнитивных, коммуникативных и организационных задач с соблюдением требований эргономики, техники безопасности, гигиены, ресурсосбережения, правовых и этических норм, норм информационной безопасности; - владеть навыками распознавания и защиты информации, информационной безопасности личности	распознавать равные и подобные фигуры, в том числе в природе, искусстве, архитектуре; уметь использовать геометрические отношения, находить геометрические величины (длина, угол, площадь, объем) при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни
ОК 03. Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных	В области духовно-нравственного воспитания: -- сформированность нравственного сознания, этического поведения; - способность оценивать ситуацию и принимать осознанные решения, ориентируясь на морально-нравственные нормы и ценности;	- уметь оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы; - уметь оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар,

ситуациях	- осознание личного вклада в построение устойчивого будущего; - ответственное отношение к своим родителям и (или) другим членам семьи, созданию семьи на основе осознанного принятия ценностей семейной жизни в соответствии с традициями народов России; Овладение универсальными регулятивными действиями: а) самоорганизация: - самостоятельно осуществлять познавательную деятельность, выявлять проблемы, ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях; - самостоятельно составлять план решения проблемы с учетом имеющихся ресурсов, собственных возможностей и предпочтений; - давать оценку новым ситуациям; способствовать формированию и проявлению широкой эрудиции в разных областях знаний, постоянно повышать свой образовательный и культурный уровень; б) самоконтроль: использовать приемы рефлексии для оценки ситуации, выбора верного решения;	сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса, цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; уметь распознавать симметрию в пространстве; уметь распознавать правильные многогранники; - уметь оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками

	- уметь оценивать риски и своевременно принимать решения по их снижению; в) эмоциональный интеллект, предполагающий сформированность: внутренней мотивации, включающей стремление к достижению цели и успеху, оптимизм, инициативность, умение действовать, исходя из своих возможностей; - эмпатии, включающей способность понимать эмоциональное состояние других, учитывать его при осуществлении коммуникации, способность к сочувствию и сопереживанию; - социальных навыков, включающих способность выстраивать отношения с другими людьми, заботиться, проявлять интерес и разрешать конфликты	
ОК 03 Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие, предпринимательскую деятельность в профессиональной сфере, использовать знания по финансовой грамотности в различных жизненных ситуациях	В области духовно-нравственного воспитания: -- сформированность нравственного сознания, этического поведения; - способность оценивать ситуацию и принимать осознанные решения, ориентируясь на морально-нравственные нормы и ценности; - осознание личного вклада в построение устойчивого будущего; - ответственное отношение к своим	- уметь оперировать понятиями: рациональные, иррациональные, показательные, степенные, логарифмические, тригонометрические уравнения и неравенства, их системы; - уметь оперировать понятиями: многогранник, сечение многогранника, куб, параллелепипед, призма, пирамида, фигура и поверхность вращения, цилиндр, конус, шар, сфера, сечения фигуры вращения, плоскость, касающаяся сферы, цилиндра, конуса, площадь поверхности пирамиды, призмы, конуса,

	родителям и (или) другим членам семьи, созданию семьи на основе осознанного принятия ценностей семейной жизни в соответствии с традициями народов России; Овладение универсальными регулятивными действиями: а) самоорганизация: - самостоятельно осуществлять познавательную деятельность, выявлять проблемы, ставить и формулировать собственные задачи в образовательной деятельности и жизненных ситуациях; - самостоятельно составлять план решения проблемы с учетом имеющихся ресурсов, собственных возможностей и предпочтений; - давать оценку новым ситуациям; способствовать формированию и проявлению широкой эрудиции в разных областях знаний, постоянно повышать свой образовательный и культурный уровень; б) самоконтроль: использовать приемы рефлексии для оценки ситуации, выбора верного	цилиндра, площадь сферы, объем куба, прямоугольного параллелепипеда, пирамиды, призмы, цилиндра, конуса, шара; умение изображать многогранники и поверхности вращения, их сечения от руки, с помощью чертежных инструментов и электронных средств; уметь распознавать симметрию в пространстве; уметь распознавать правильные многогранники; - уметь оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками

	решения; - уметь оценивать риски и своевременно принимать решения по их снижению; в) эмоциональный интеллект, предполагающий сформированность: внутренней мотивации, включающей стремление к достижению цели и успеху, оптимизм, инициативность, умение действовать, исходя из своих возможностей; - эмпатии, включающей способность понимать эмоциональное состояние других, учитывать его при осуществлении коммуникации, способность к сочувствию и сопереживанию; - социальных навыков, включающих способность выстраивать отношения с другими людьми, заботиться, проявлять интерес и разрешать конфликты	
ОК 04 Эффективно взаимодействовать и работать в коллективе и команде	готовность к саморазвитию, самостоятельности и самоопределению; -овладение навыками учебно-исследовательской, проектной и социальной деятельности; Овладение универсальными	- уметь оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; уметь вычислять вероятность с использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности

	коммуникативными действиями: б) совместная деятельность: - понимать и использовать преимущества командной и индивидуальной работы; - принимать цели совместной деятельности, организовывать и координировать действия по ее достижению: составлять план действий, распределять роли с учетом мнений участников обсуждать результаты совместной работы; - координировать и выполнять работу в условиях реального, виртуального и комбинированного взаимодействия; - осуществлять позитивное стратегическое поведение в различных ситуациях, проявлять творчество и воображение, быть инициативным. Овладение универсальными регулятивными действиями: г) принятие себя и других людей: - принимать мотивы и аргументы других людей при анализе результатов деятельности; - признавать свое право и	реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях; - уметь свободно оперировать понятиями: степень с целым показателем, корень натуральной степени, степень с рациональным показателем, степень с действительным (вещественным) показателем, логарифм числа, синус, косинус и тангенс произвольного числа; - уметь свободно оперировать понятиями: график функции, обратная функция, композиция функций, линейная функция, квадратичная функция, степенная функция с целым показателем, тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, показательная и логарифмическая функции; уметь строить графики функций, выполнять преобразования графиков функций; - уметь использовать графики функций для изучения процессов и зависимостей при решении задач из других учебных предметов и из реальной жизни; выражать формулами зависимости между величинами; - свободно оперировать понятиями: четность функции, периодичность функции, ограниченность функции, монотонность функции, экстремум функции, наибольшее и наименьшее значения функции

	право других людей на ошибки; - развивать способность понимать мир с позиции другого человека	на промежутке; уметь проводить исследование функции; - уметь использовать свойства и графики функций для решения уравнений, неравенств и задач с параметрами; изображать на координатной плоскости множества решений уравнений, неравенств и их систем
ОК 05 Осуществлять устную и письменную коммуникацию на государственном языке Российской Федерации с учетом особенностей социального и культурного контекста	В области эстетического воспитания: - эстетическое отношение к миру, включая эстетику быта, научного и технического творчества, спорта, труда и общественных отношений; - способность воспринимать различные виды искусства, традиции и творчество своего и других народов, ощущать эмоциональное воздействие искусства; - убежденность в значимости для личности и общества отечественного и мирового искусства, этнических культурных традиций и народного творчества; - готовность к самовыражению в разных видах искусства, стремление проявлять качества творческой личности; Овладение универсальными коммуникативными действиями:	- уметь оперировать понятиями: среднее арифметическое, медиана, наибольшее и наименьшее значения, размах, дисперсия, стандартное отклонение числового набора; умение извлекать, интерпретировать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, отражающую свойства реальных процессов и явлений; представлять информацию с помощью таблиц и диаграмм; исследовать статистические данные, в том числе с применением графических методов и электронных средств; - уметь оперировать понятиями: точка, прямая, плоскость, пространство, двугранный угол, скрещивающиеся прямые, параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей, угол между прямыми, угол между прямой и плоскостью, угол между плоскостями, расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми, расстояние между плоскостями; - уметь использовать при решении задач изученные факты и теоремы планиметрии; умение

	а) общение: - осуществлять коммуникации во всех сферах жизни; - распознавать невербальные средства общения, понимать значение социальных знаков, распознавать предпосылки конфликтных ситуаций и смягчать конфликты; - развернуто и логично излагать свою точку зрения с использованием языковых средств	оценивать размеры объектов окружающего мира
ОК 06 Проявлять гражданско-патриотическую позицию, демонстрировать осознанное поведение на основе традиционных общечеловеческих ценностей, в том числе с учетом гармонизации межнациональных и межрелигиозных отношений, применять стандарты антикоррупционного поведения	- осознание обучающимися российской гражданской идентичности; - целенаправленное развитие внутренней позиции личности на основе духовно-нравственных ценностей народов Российской Федерации, исторических и национально-культурных традиций, формирование системы значимых ценностно-смысловых установок, антикоррупционного мировоззрения, правосознания, экологической культуры, способности ставить цели и строить жизненные планы; В части гражданского воспитания: - осознание своих конституционных прав и	- уметь оперировать понятиями: прямоугольная система координат, координаты точки, вектор, координаты вектора, скалярное произведение, угол между векторами, сумма векторов, произведение вектора на число; находить с помощью изученных формул координаты середины отрезка, расстояние между двумя точками; -уметь выбирать подходящий изученный метод для решения задачи, распознавать математические факты и математические модели в природных и общественных явлениях, в искусстве; умение приводить примеры математических открытий российской и мировой математической науки. - уметь оперировать понятиями: случайный опыт и случайное событие, вероятность случайного события; уметь вычислять вероятность с

	обязанностей, уважение закона и правопорядка; - принятие традиционных национальных, общечеловеческих гуманистических и демократических ценностей; - готовность противостоять идеологии экстремизма, национализма, ксенофобии, дискриминации по социальным, религиозным, расовым, национальным признакам; - готовность вести совместную деятельность в интересах гражданского общества, участвовать в самоуправлении в общеобразовательной организации и детско-юношеских организациях; - умение взаимодействовать с социальными институтами в соответствии с их функциями и назначением; - готовность к гуманитарной и волонтерской деятельности; патриотического воспитания: - сформированность российской гражданской идентичности, патриотизма, уважения к	использованием графических методов; применять формулы сложения и умножения вероятностей, комбинаторные факты и формулы при решении задач; оценивать вероятности реальных событий; знакомство со случайными величинами; умение приводить примеры проявления закона больших чисел в природных и общественных явлениях

	своему народу, чувства ответственности перед Родиной, гордости за свой край, свою Родину, свой язык и культуру, прошлое и настоящее многонационального народа России; - ценностное отношение к государственным символам, историческому и природному наследию, памятникам, традициям народов России, достижениям России в науке, искусстве, спорте, технологиях и труде; - идейная убежденность, готовность к служению и защите Отечества, ответственность за его судьбу; освоенные обучающимися межпредметные понятия и универсальные учебные действия (регулятивные, познавательные, коммуникативные); - способность их использования в познавательной и социальной практике, готовность к самостоятельному планированию и осуществлению учебной деятельности, организации учебного сотрудничества с педагогическими работниками и сверстниками, к участию в построении	

	индивидуальной образовательной траектории; - овладение навыками учебно-исследовательской, проектной и социальной деятельности	
ОК 07 Содействовать сохранению окружающей среды, ресурсосбережению, применять знания об изменении климата, принципы бережливого производства, эффективно действовать в чрезвычайных ситуациях	- не принимать действия, приносящие вред окружающей среде; - уметь прогнозировать неблагоприятные экологические последствия предпринимаемых действий, предотвращать их; - расширить опыт деятельности экологической направленности; - разрабатывать план решения проблемы с учетом анализа имеющихся материальных и нематериальных ресурсов; - осуществлять целенаправленный поиск переноса средств и способов действия в профессиональную среду; - уметь переносить знания в познавательную и практическую области жизнедеятельности; - предлагать новые проекты, оценивать идеи с позиции новизны, оригинальности, практической	- уметь оперировать понятиями: функция, непрерывная функция, производная, первообразная, определенный интеграл; уметь находить производные элементарных функций, используя справочные материалы; исследовать в простейших случаях функции на монотонность, находить наибольшие и наименьшие значения функций; строить графики многочленов с использованием аппарата математического анализа; применять производную при решении задач на движение; решать практико-ориентированные задачи на наибольшие и наименьшие значения, на нахождение пути, скорости и ускорения; - уметь оперировать понятиями: движение в пространстве, подобные фигуры в пространстве; использовать отношение площадей поверхностей и объемов подобных фигур при решении задач; - уметь вычислять геометрические величины (длина, угол, площадь, объем, площадь поверхности), используя изученные формулы и

	значимости; - давать оценку новым ситуациям, вносить коррективы в деятельность, оценивать соответствие результатов целям	методы
ПК 1.4 Разрабатывать и осуществлять технологические процессы установки дополнительного оборудования на автотранспортные средства		- Планировать, оптимизировать и документировать последовательность действий в ходе выполнения практических заданий и индивидуального проекта - Использовать терминологию и сокращения (аббревиатуры), при выполнении и оформлении практических работ, индивидуального проекта - Знать правила подготовки и проведения презентации.
ПК 2.1 Планировать и организовывать материально-техническое обеспечение процесса технического обслуживания и ремонта автотранспортных средств и их компонентов		- Рассчитывать степенные и логарифмические выражения, необходимые для основных технико-экономических показателей деятельности по техническому обслуживанию и ремонту автотранспортных средств и их компонентов. - Использовать в ходе выполнения практических работ и индивидуального проекта техническими требованиями по оформлению вышеуказанных работ. Применять таблицу Брадиса.

Общее количество часов на практические работы по предмету Математика составляет 40 часов.

Перечень основной и дополнительной литературы, электронных ресурсов:

Основная литература:

1. Мерзляк, А. Г. Математика. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Углублённый уровень : учебник / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков ; под. ред. В. Е. Подольского. - 7-е изд, стер. - Москва : Просвещение, 2023. - 480 с. - ISBN 978-5-09-103607-7. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2113349 – Режим

доступа: по подписке.
2. Мерзляк, А. Г. Математика. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Углубленный уровень : учебник / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков ; под. ред. В.Е. Подольского. - 6-е изд., стер. - Москва : Просвещение, 2023. - 416 с. - ISBN 978-5-09-103608-4. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2160884 – Режим доступа: по подписке.
3. Мерзляк, А. Г. Математика. Геометрия. 10 класс. Углубленный уровень : учебник / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков ; под. ред. В. Е. Подольского. - 7-е изд., стер. - Москва : Просвещение, 2023. - 272 с. - ISBN 978-5-09-103609-1. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2160885 – Режим доступа: по подписке.:
4. Мерзляк, А. Г. Математика. Геометрия. 11 класс. Углубленный уровень : учебник / А. Г. Мерзляк, Д. А. Номировский, В. М. Поляков ; под. ред. В.Е. Подольского. - 7-е изд., стер. - Москва: Просвещение, 2023. - 256 с. - ISBN 978-5-09-103610-7. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.ru/catalog/product/2160886– Режим доступа: по подписке

Общие критерии оценки.

Оценка «2»:

Обучающийся усвоил некоторые элементарные знания по основным вопросам дисциплины, но не овладел необходимой системой знаний.

Оценка «3»:

Обучающийся обладает необходимой системой знаний и владеет некоторыми умениями по дисциплине, способен понимать и интерпретировать освоенную информацию, что позволит ему в дальнейшем развить такие качества умственной деятельности, как глубина, гибкость, критичность, доказательность, эвристичность.

Оценка «4»:

Обучающийся продемонстрировал глубокие прочные знания и развитые практические умения и навыки, может сравнивать, оценивать и выбирать методы решения заданий, работать целенаправленно, используя связанные между собой формы представления информации.

Оценка «5»:

Обучающийся способен обобщать и оценивать информацию, полученную на основе исследования нестандартной ситуации; использовать сведения из различных источников, успешно соотнося их с предложенной ситуацией.

Таблица – Перечень практических работ

№	Тема	Вид работы и название работы	Коды ОК	Количество часов
Семестр I				
1.	Тема 1.4. Уравнения и неравенства. Системы уравнений и неравенств	Практическая работа №1 профессионально-ориентированного содержания Решение линейных и квадратных уравнений, неравенств и систем линейных уравнений различными способами с применением математического программного обеспечения MathCad.	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
2.	Тема 1.5. Функции и графики. Степенная функция с целым показателем	Практическая работа №2 профессионально ориентированного содержания Построение графиков с помощью преобразований используя программу Microsoft Excel	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
3.	Тема 1.7. Логарифмическая функция. Логарифмические уравнения и неравенства	Практическая работа №3 Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
4.	Тема 1.8. Тригонометрические функции числового аргумента	Практическая работа №4 Преобразования тригонометрических выражений	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
5.	Тема 1.8. Тригонометрические функции числового аргумента	Практическая работа №5 Решение тригонометрических уравнений	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
				Итого: 10

Семестр 2

№	Тема	Вид, номер и название работы	Коды знаний и умений	Количество часов

6.	Тема 1.9. Начала математического анализа	Практическая работа № 6 профессионально-ориентированного содержания Дифференцирование функций с применением математического программного обеспечения MathCad.	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
7.	Тема 1.9. Начала математического анализа	Практическая работа №7 Применение производной к решению геометрических и физических задач	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
8.	Тема 1.11. Применение производной к исследованию функции	Практическая работа № 8. Применение производной к исследованию функций (вычисление промежутков монотонности и точек экстремума, наибольшего и наименьшего значения функции, построение графиков функций).	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
9.	Тема 1.12. Первообразная и интеграл	Практическая работа №9 профессионально-ориентированного содержания Вычисление первообразной и неопределенного интеграла с применением математического программного обеспечения MathCad.	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
10.	Тема 1.12. Первообразная и интеграл	Практическая работа № 10 профессионально-ориентированного содержания Вычисление определенного интеграла с применением математического программного обеспечения MathCad. Нахождение площадей криволинейной трапеции с помощью интеграла.	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
11.	Тема 2.2 Параллельность прямых, прямой и плоскости, плоскостей	Практическая работа № 11. Построение сечений геометрических фигур.	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
12.	Тема 2.4 Многогранники	Практическая работа № 12. Расчеты в сечениях на выносных чертежах.	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06;	2

		(Теорема о пропорциональных отрезках. Подобие треугольник. Теорема Менелая.)	ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	
13.	Тема 2.4 Многогранники	Практическая работа №13. Изготовление многогранника.	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
14.	Тема 2.4 Многогранники	Практическая работа №14. Вычисление площадей поверхностей многогранников.	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
15.	Тема 2.4 Многогранники	Практическая работа №15. Вычисление объемов многогранников.	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
16.	Тема 2.5 Тела вращения	Практическая работа № 16. Вычисление площадей поверхностей тел вращения.	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
17.	Тема 2.5 Тела вращения	Практическая работа № 17. Вычисление объемов тел вращения.	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
18.	Тема 2.7 Векторы и координаты в пространстве.	Практическая работа №18. Действия над векторами.	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
19.	Тема 3.1 Элементы теории графов	Практическая работа № 19. Решение задач с помощью графов.	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
20.	Тема 3.5 Числовые характеристики	Практическая работа № 20 профессионально-ориентированного содержания Задачи, приводящие к распределению Пуассона. Решение с использованием электронных таблиц Excel.	ОК 01; ОК 02; ОК03; ОК 04; ОК 05; ОК 06; ОК07; ПК 1.4; ПК 2.1	2
				Итого: 30

Практическая работа №1

Решение линейных и квадратных уравнений и неравенств и систем линейных уравнений различными способами с применением математического программного обеспечения MathCad.

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: Систематизация и закрепление теоретического материала; формирование умений применять полученные знания при решении уравнений и неравенств.

Задание:

1.Решить линейное уравнение.

2.Решить квадратное уравнение.

3.Решить линейное неравенство.

4.Решить квадратное неравенство.

5. Решить неравенство методом интервалов.

6. Решить систему уравнений методом подстановки.

7. Решить систему уравнений методом алгебраического сложения.

8. Решить систему уравнений методом графическим способом.

9. Решить систему уравнений методом Крамера.

№	**Уравнения**	**Неравенства**
1)	$\frac{x-4}{2}+3x=5$; $9x^2-6x=0$; $-3x^2-15x+42=0$; $x^4+4x^2-5=0$.	$6x+1\geq-1$; $x^2+4x-5>0$; $\frac{5x+8}{3x-7}<0$.
2)	$\frac{x+2}{3}-4x=8$; $\frac{x^2}{9}-\frac{x}{3}=0$; $-x^2-6x-5=0$; $x^4-10x^2+9=0$.	$2-3x>2$; $x^2+4x+4>0$; $\frac{4-2x}{10x+25}>0$.
3)	$\frac{5-x}{2}+\frac{4x-3}{3}=4$; $-3x^2-6x=0$; $-x^2+7x-10=0$; $x^4+x^2-2=0$.	$7-x\geq4x-3$; $x^2+4x+5>0$; $\frac{3-6x}{49x+7}\leq0$.
4)	$\frac{5x-4}{4}-\frac{x+2}{3}=2$; $4x^2-4=0$; $2x^2-3x-2=0$; $9x^4+14x^2-8=0$.	$2+6x>5+7x$; $x^2-10x+21>0$; $\frac{15x-5}{2+4x}\leq0$.
5)	$\frac{x-2}{5}-\frac{3x+2}{6}=\frac{2}{3}-x$; $\frac{x^2}{4}-25=0$; $x^2+6x+45=0$; $x^4-12x^2-64=0$.	$4x+7\leq6x+1$; $x^2-6x>27$; $\frac{3x-6}{5+10x}\geq0$.

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5

1.Решить систему методом подстановки $\begin{cases}2x-y=9\\3x+2y=6{,}5\end{cases}$ 2.Решить систему методом алгебраического сложения $\begin{cases}3x+2y=17\\5x+4y=31\end{cases}$ 3.Решить систему графическим способом $\begin{cases}4x+3y=29\\2x-y=7\end{cases}$ 4.Решить систему методом Крамера $\begin{cases}5x+y=7\\3x-2y=12\end{cases}$	1.Решить систему методом подстановки $\begin{cases}x+y=7\\2y-x=5\end{cases}$ 2.Решить систему методом алгебраического сложения $\begin{cases}7x+4y=13\\3x-y=11\end{cases}$ 3.Решить систему графическим способом $\begin{cases}3x-5y=2\\5x-1{,}5x=4\end{cases}$ 4.Решить систему методом Крамера. $\begin{cases}5x-3y=26\\2x+y=17\end{cases}$	1.Решить систему методом подстановки $\begin{cases}8x-y=4\\21x+2y=-3\end{cases}$ 2.Решить систему методом алгебраического сложения $\begin{cases}4x+3y=29\\2x-y=7\end{cases}$ 3.Решить систему графическим способом $\begin{cases}3x+2y=13\\x-2y=-1\end{cases}$ 4.Решить систему методом Крамера. $\begin{cases}2y-x=2\\2x-4y=-4\end{cases}$	1.Решить систему методом подстановки $\begin{cases}4x-2y=2\\2x+3y=11\end{cases}$ 2.Решить систему методом алгебраического сложения $\begin{cases}3x+4y=253\\y-5x=0\end{cases}$ 3.Решить систему графическим способом $\begin{cases}3x-3y=9\\-6x+6y=9\end{cases}$ 4.Решить систему методом Крамера. $\begin{cases}2x+3y=18\\x+2y=11\end{cases}$	1.Решить систему методом подстановки $\begin{cases}2x+11y=15\\10x-11y=9\end{cases}$ 2.Решить систему методом алгебраического сложения $\begin{cases}5x+10y=x+8\\4x-12y=50-y\end{cases}$ 3.Решить систему графическим способом $\begin{cases}3x-5y=2\\5x-1{,}5x=4\end{cases}$ 4.Решить систему методом Крамера. $\begin{cases}3x+y=7\\x+2y=-1\end{cases}$

Методические указания

Определение уравнения первой степени (линейное уравнение). Уравнением первой степени называется такое уравнение, в котором неизвестная переменная присутствует только в первой степени.

Алгоритм решения уравнений первой степени.

1. Раскрываем скобки, если они есть в уравнении.
2. В левую часть уравнения переносим все те члены уравнения, которые содержат неизвестную переменную. Приводим подобные слагаемые.

3. В результате мы получаем уравнение вида: $kx=a$, где x – неизвестное, а, k – любые числа. Тогда решением уравнения будет число $x=\frac{a}{k}$.

Определение квадратного уравнения.

Квадратным уравнением называется уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где x - переменная, a, b, c - некоторые числа, причем $a\neq 0$.

Алгоритм решения квадратного уравнения

1. Найти число, называемое дискриминантом квадратного уравнения и равное $D=b^2-4ac$.
2. Если $D<0$, то данное квадратное уравнение не имеет корней.
3. Если $D=0$, то данное квадратное уравнение имеет единственный корень, который равен $x=-\frac{b}{2a}$
4. Если $D>0$, то данное квадратное уравнение имеет два корня, которые равны $x_1=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$; $x_2=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$

Решение квадратных неравенств с различными коэффициентами.

1. Решить соответствующее этому неравенству уравнение и разложить неравенство на сомножители.
2. Построить числовую прямую и отметить на ней точки, соответствующие корням решенного квадратного уравнения.
3. Выбрать соответствующие неравенству промежутки.

Решение примеров.

1. Решите уравнение:

$$\frac{x+9}{3}-\frac{x}{5}=1$$

1) $5\cdot(x+9)-3\cdot x=15$, 2) $2x+45=15$, 3) $2x=-30$, 4) $x=-15$.

Ответ: $x=-15$.

2. Решите квадратное уравнение:

$$3x^2+9=12x-x^2$$

$$3x^2+9-12x+x^2=0$$

$$4x^2-12x+9\ \ =0$$

$$D=(12)^2-4\cdot 4\cdot 9=144-144=0$$

$x_{1,2} = -\frac{-12}{8} = \frac{3}{2}$ Ответ: $x = \frac{3}{2}$

3. Решите неравенство:

$x^2 + 4x - 5 \le 0$

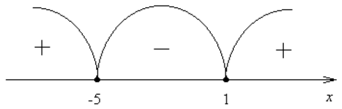
1. Решим уравнение: $x^2 + 4x - 5 = 0$

$D = (4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5) = 16 + 20 = 36$, $x_1 = \frac{-4-6}{2} = -5$, $x_2 = \frac{-4+6}{2} = 1$.

2. Разложим выражение на множители и получим:

$(x+5) \cdot (x-1) \le 0$

3. Построим числовую прямую и отметим на ней точки 1 и -5.



Для каждого промежутка определяем знак неравенства.

Нашему неравенству удовлетворяют числа из промежутка [-5;1].

Ответ: $x \in [-5;1]$.

Система двух линейных уравнений с двумя переменными в общем виде имеет вид

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

1) <u>Способ подстановки</u>.

$$\begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ -10x - 7y = -5 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ 10x + 7y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x + \frac{8}{3}y = \frac{31}{3} \\ 10x + 7y = 5 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{31}{3} - \frac{8}{3}y \\ 10\left(\frac{31}{3} - \frac{8}{3}y\right) + 7y = 5 \end{cases}$$

Решаем второе уравнение относительно «*y*»: $\frac{310}{3} - \frac{80}{3}y + 7y = 5$, приведем к общему знаменателю и так как $3 \ne 0$, то

$310 - 80y + 21y = 15$

$-59y = 15 - 310$

$-59y = -295$; $y = \frac{-295}{-59} = 5$

$y = 5$, тогда $x = \frac{31}{3} - \frac{8}{3} \cdot 5 = \frac{31}{3} - \frac{40}{3} = -\frac{9}{3} = -3$

Ответ: $x = -3$; $y = 5$.

2) Способ алгебраического сложения

$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases}$ уравняем по модулю коэффициенты при x, для этого умножим первое уравнение на 10, а второе – на 3.

$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases} \left| \begin{matrix} 10 \\ 3 \end{matrix} \right.$ $\begin{cases} 30x+80y=310 \\ -30x-21y=-15 \end{cases}$ почленно сложим

$$59y=295$$
$$y=5$$

подставим y = 5 в любое из уравнений системы, например в первое, и найдем x

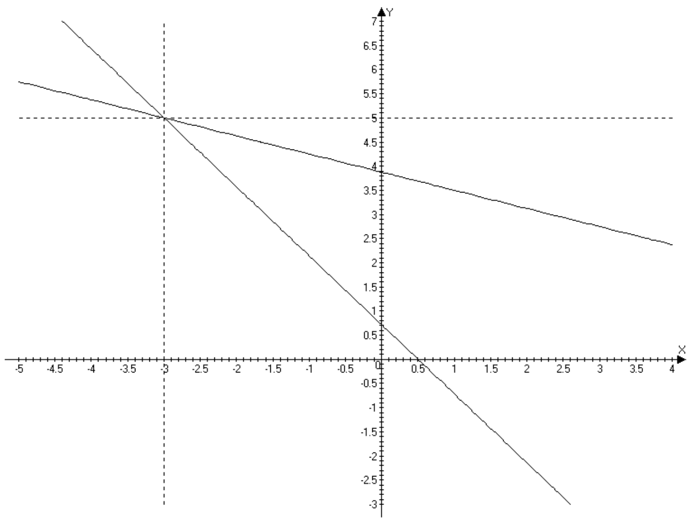
$$3x+8\cdot 5=31$$
$$3x+40=31$$
$$3x=-9$$
$$x=-3$$

Ответ: x = –3; y = 5.

3)Графический способ

$\begin{cases} 3x+8y=31 \\ -10x-7y=-5 \end{cases}$

графиком каждого уравнения является прямая, а прямая определяется двумя точками.



$$3x+8y=31$$
$$x=0; \quad y=\frac{31}{8}=3\frac{7}{8}$$
$$x=2; 6+8y=31;$$
$$y=\frac{31-6}{8}=\frac{25}{8}=3\frac{1}{8}$$

Рис.1. Графическое решение системы линейных уравнений

$$-10x-7y=-5$$
$$10x+7y=5$$
$$x=0; y=\frac{5}{7}$$
$$x=2; 20+7y=5;$$
$$7y=-15; y=-\frac{15}{7}=-2\frac{1}{7}$$

Ответ: (-3;5)

4) Метод

Число $a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ называется определителем второго порядка

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

Для нахождения значений переменных x и y используются формулы $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, которые называются формулами Крамера.

1) Если $\Delta \neq 0$ – система имеет единственное решение
2) Если $\Delta = 0$, но $\Delta_x \neq 0$ или $\Delta_y \neq 0$ система не имеет решения
3) Если $\Delta = 0$ и $\Delta_x = 0$ и $\Delta_y = 0$ – система имеет множество решений.

$$\begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ -10x - 7y = -5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 8y = 31 \\ 10x + 7y = 5 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 10 & 7 \end{vmatrix} = 21 - 80 = -59 \neq 0$$ единственное решение

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 31 & 8 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 217 - 40 = 177 \qquad \Delta_y = \begin{vmatrix} 3 & 31 \\ 10 & 5 \end{vmatrix} = 15 - 310 = -295$$

$$x = \frac{177}{-59} = -3; \qquad y = \frac{-295}{-59} = 5$$

Ответ: (–3; 5).

Решение биквадратных уравнений

Решить уравнение:

$$x^4 - 6x^2 = -5 \qquad (9)$$

Для решения уравнений данного типа в вычислительной среде Mathcad необходимо выполнить следующие действия:

1. Нужно переписать исходное уравнение так, чтобы правая часть равнялась 0, т. е. в общем виде это запишется как $f(x) = 0$, где $f(x)$ – уравнение, которое необходимо решить.
2. Нужно набрать уравнение в программе Mathcad, используя панель *операторы*, *символы* и т. д. на вкладке *математика*. Знак равенства необходимо вводить, используя сочетания клавиш Ctrl +.
3. Выделить в уравнении переменную, которую требуется найти.
4. В панели *символьные операции* нажать на значок *solve*:
5. Рядом с уравнением появится его решение.
6. Можно поставить знак равенства и получить результат в виде десятичной дроби.

Решение данного уравнения в программе Mathcad приведено на рисунке 11.

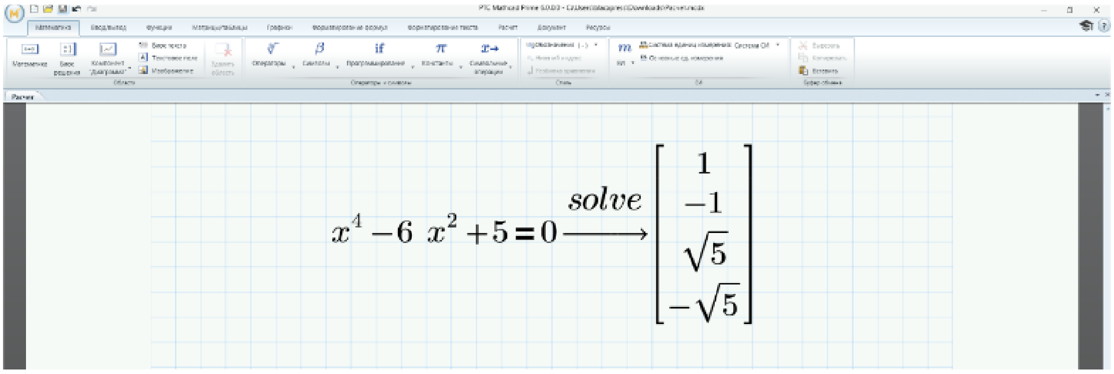


Рис. 11. Решение биквадратного уравнения (9) в вычислительной среде Mathcad

Проверим результат вычисления в программе Mathcad, для этого решим уравнение без использования компьютера.

Сделаем следующую замену $x^2 = y$,

$$y^2 - 6y + 5 = 0$$

$$D = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$$

$$y_1 = \frac{6 + \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 5$$

$$y_2 = \frac{6 - \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = 1$$

Теперь возвращаемся от временной переменной y к переменной x с помощью формулы $y = x^2$:

$$\begin{cases} x^2 = 5 \\ x^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \sqrt{5} \\ x_2 = -\sqrt{5} \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

Ответ, полученный в программе Mathcad, является корректным.

Форма контроля: отчет

Практическая работа №2
Построение графиков с помощью преобразований используя программу Microsoft Excel.

Количество часов на выполнение: 2 часа, из них на практическую подготовку – 2 часа.

Цель работы: Закрепление полученных знаний и умений при построении графиков функции и описании их свойств.

Задание:

1. Исследовать функцию на четность и нечетность.
2. Построить графики функции и описать основные свойства.
3. Построить графики функции с помощью преобразований.
4. Построить графики функции в электронных таблицах Excel.

Задания:

Вариант 1

1)Исследовать функцию на четность и нечетность.

а) $f(x)=10x^3+4x-1$ в) $f(x)=x^2(2x-x^3)$

б) $f(x)=3x^4-2x^2+8$ г) $f(x)=\dfrac{x^2}{2x^4+6}$

2)

x	**-7**	**-5**	**-3**	**-2**	**0**	**3**	**5**	**7**	**9**	**10**	**11**
y	**0**	**4**	**0**	**-2**	**0**	**6**	**3**	**5**	**0**	**-2**	**0**

а)Построить график функции.
б)Указать область определения и область значения.
в)Указать промежутки знакопостоянства.
г)В каких точках график функции пересекает ось абсцисс.
3)Построить графики функций:

1) $y=x^3+2$ 5) $y=-(x+1)^3-3$

2) $y=-x^2-4$ 6) $y=\dfrac{1}{x-3}+1$

3) $y=-3x^2+1$ 7) $y=(x-1)^2-4$

4) $y=3-\sqrt{x-2}$ 8) $y=\sqrt{x}-2$

4) Построить графики функции в электронных таблицах Excel:

$y=-x^2+2x+8$; $y=x^2-6x+9$

Вариант 2

1)Исследовать функцию на четность и нечетность.

а) $f(x)=4x^3+10x-2$ в) $f(x)=x^2(3x+x^3)$

б) $f(x)=5x^4-2x^2+9$ г) $f(x)=\dfrac{x^2}{3x^4-6}$

x	**-8**	**-6**	**-5**	**-4**	**-2**	**0**	**4**	**6**	**8**	**10**

y	**0**	**2**	**0**	**-4**	**0**	**3**	**0**	**-2**	**2**	**0**

2)

а)Построить график функции.
б)Указать область определения и область значения.
в)Указать промежутки знакопостоянства.
3)Построить графики функций:

1) $y = x^2 + 2$
2) $y = -x^3 - 4$
3) $y = -2x^2 - 1$
4) $y = -\sqrt{x+2} - 3$
5) $y = 3 - (x-1)^3$
6) $y = \frac{1}{x+3} - 1$
7) $y = (x+1)^2 - 4$
8) $y = \sqrt{x} + 2$

4) Построить графики функции в электронных таблицах Excel:
$y = -2x^2 - 3x + 2$; $y = x^2 + 6x + 9$

Вариант 3

1)Исследовать функцию на четность и нечетность.

а) $f(x) = 7x^3 - \frac{1}{3}x + 8$

б) $f(x) = 9x^4 + 4x^2 - 6$

в) $f(x) = x^2(4x + x^3)$

г) $f(x) = \frac{x^2}{2x^4 + 1}$

2)

x	**-12**	**-10**	**-8**	**-6**	**-4**	**-2**	**0**	**4**	**8**	**10**
y	**0**	**-4**	**-2**	**-6**	**0**	**8**	**0**	**4**	**-3**	**0**

а)Построить график функции.
б)Указать область определения и область значения.
в)Указать промежутки знакопостоянства.
г)В каких точках график функции пересекает ось абсцисс.
3)Построить графики функций:

1) $y = x^3 - 1$
2) $y = -x^2 + 2$
3) $y = -2x^2 + 4$
4) $y = 2 - \sqrt{x+1}$
5) $y = -(x+3)^3 - 5$
6) $y = \frac{1}{x-2} + 2$
7) $y = (x+6)^2 - 4$
8) $y = \sqrt{x} + 3$

4) Построить графики функции в электронных таблицах Excel:

$y = -x^2 + 2x + 8$

$y = x^2 - 6x + 9$

Вариант 4

1)Исследовать функцию на четность и нечетность.

а) $f(x)=3x^3+7x-11$ в) $f(x)=x^2(5x-x^3)$

б) $f(x)=2x^4-\frac{1}{9}x^2+1$ г) $f(x)=\frac{x^2}{4x^4+6}$

2)

x	**-12**	**-10**	**-8**	**-6**	**-4**	**0**	**3**	**5**	**6**	**10**
y	**0**	**1**	**-3**	**4**	**0**	**6**	**-5**	**-3**	**-5**	**0**

а)Построить график функции.
б)Указать область определения и область значения.
в)Указать промежутки знакопостоянства.
г)В каких точках график функции пересекает ось абсцисс.
3)Построить графики функций:

1) $y=x^2+3$ 5) $y=-(x+4)^3+5$

2) $y=-x^3+1$ 6) $y=\frac{1}{x-3}+3$

3) $y=-3x^2+2$ 7) $y=(x-1)^2-6$

4) $y=4-\sqrt{x-3}$ 8) $y=\sqrt{x}-3$

4)Построить график функции :

$y=-2x^2-3x+2$; $y=x^2+6x+9$

Вариант 5

1)Исследовать функцию на четность и нечетность.

а) $f(x)=6x^3-\frac{1}{4}x+12$ в) $f(x)=x^2(x-x^3)$

б) $f(x)=2x^4-7x^2+9$ г) $f(x)=\frac{x^2}{3x^4+8}$

2)

x	**-8**	**-6**	**-5**	**-4**	**-2**	**0**	**4**	**6**	**8**	**10**
y	**0**	**2**	**0**	**-4**	**0**	**3**	**0**	**-2**	**2**	**0**

а)Построить график функции.
б)Указать область определения и область значения.
в)Указать промежутки знакопостоянства.
г)В каких точках график функции пересекает ось абсцисс.

3)Построить графики функций:

1) $y = x^2 - 3$

2) $y = -x^3 + 4$

3) $y = -2x^2 - 2$

4) $y = 3 - \sqrt{x+1}$

5) $y = -(x-4)^3 + 5$

6) $y = \dfrac{1}{x+3} - 4$

7) $y = (x+2)^2 - 6$

8) $y = \sqrt{x} + 1$

4) Построить графики функции в электронных таблицах Excel:
$y = -2x^2 - 3x + 2$; $y = x^2 + 6x + 9$

Методические указания:

Линейная функция - это функция вида: y = kx + b где, k и b являются действительными числами.

Линейная функция имеет следующие свойства:
1. y = kx + b - это ни чётная, ни нечётная функция;
2. Область определения функции y = kx + b - вся числовая прямая;
3. Множество значений линейной функции - вся числовая прямая;
4. Если k > 0, то функция возрастает, а если k < 0, то линейная функция убывает.

График линейной функции есть прямая. Рассмотрим график линейной функции y = 2x + 1, здесь угловой коэффициент больше нуля, угол прямой y = 2x + 1 с положительным направлением оси x - острый.

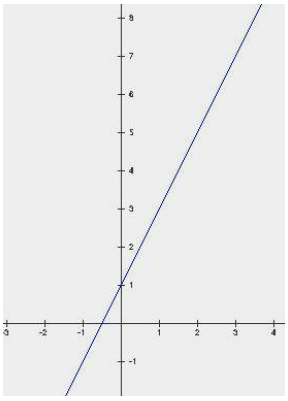


Рис.2. График линейной функции при к >0

Рассмотрим, как изменится график линейной функции y = 2x + 1, если угловой коэффициент сделать отрицательным, т.е. y = -2x + 1.

Здесь угол прямой y = -2x + 1 с положительным направлением оси x - тупой.

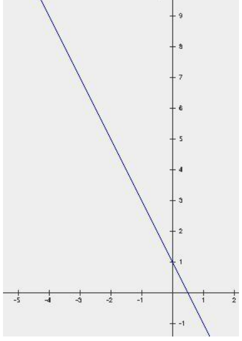


Рис.3. График линейной функции при к <0

Свойства:

1. Функция у = х^2 - это четная функция, т.е. при изменении знака аргумента на противоположный, значение функции не меняется;
2. На промежутке $(-\infty;0)$ функция убывает;
3. На промежутке $(0;+\infty)$ функция возрастает;
4. Область определения функции - вся числовая прямая;
5. Множество значений функции - $(0;+\infty)$.

График функции у = х^2 называется парабола:

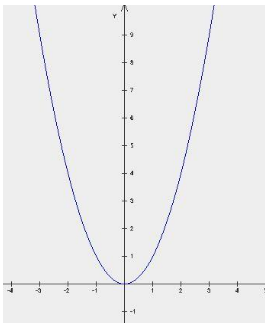


Рис.4. График квадратичной функции

Свойства:

1. Функция у = х^3 - это нечетная функция, т.е. при изменении знака аргумента на противоположный, значение функции меняется;
2. Функция возрастает на всей числовой прямой;
3. Область определения функции - вся числовая прямая;
4. Множество значений функции - вся числовая прямая.

График функции у = х^3 называется кубическая парабола:

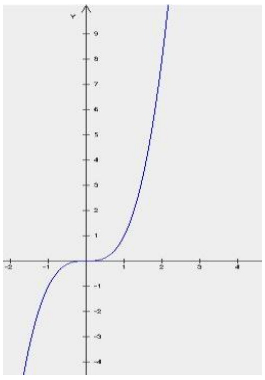


Рис.5. График степенной функции $y = x^3$

Определение. Преобразования графиков функций — это линейные преобразования функции $y = f(x)$ или её аргумента x к виду $y = af(kx + b) + m$, а также преобразование с использованием модуля.

Зная, как строить графики функции $y = f(x)$, где $y = kx + b$, $y = ax^2$, $y = x^n$, $y=xk$, $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, $y=ax$, $y=\log ax$, можно построить график функции $y = af(kx +b) + m$.

Общий вид функции	Преобразования
$y =f(x - b)$	Параллельный перенос графика вдоль оси абсцисс на $\mid b \mid$ единиц вправо, если $b> 0$; влево, если $b< 0$.
$y =f(x + b)$	влево, если $b> 0$; вправо, если $b< 0$.
$y =f(x) + m$	Параллельный перенос графика вдоль оси ординат на $\mid m \mid$ единиц вверх, если $m> 0$, вниз, если $m< 0$.
	Отражение графика
$y = f(- x)$	симметричное отражение графика относительно оси ординат.
$y = - f(x)$	симметричное отражение графика относительно оси абсцисс.
	Сжатие и растяжение графика
$y = f(kx)$	При $k> 1$ — сжатие графика к оси ординат в k раз, при $0 <k< 1$ — растяжение графика от оси ординат в k раз.
$y = kf(x)$	При $k> 1$ — растяжение графика от оси абсцисс в kраз, при $0 <k< 1$ — сжатие графика к оси абсцисс в k раз.

Рассмотрим пример преобразования графиков функции на примерах: $y = \sqrt{x}$

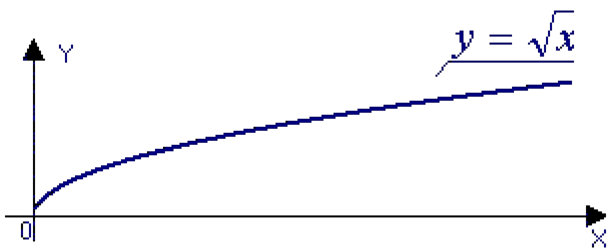


Рис.6. График функции $y = \sqrt{x}$

Перенесем данный график на 3 единичных отрезка влево, прибавив к х число 3: $y = \sqrt{x+3}$

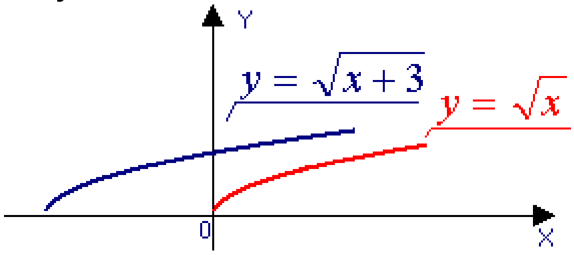


Рис.7. Преобразованный график функции $y = \sqrt{x}$

Точно также перенесем график на 2 единичных отрезка вправо, отняв от х число 2:

$y = \sqrt{x-2}$

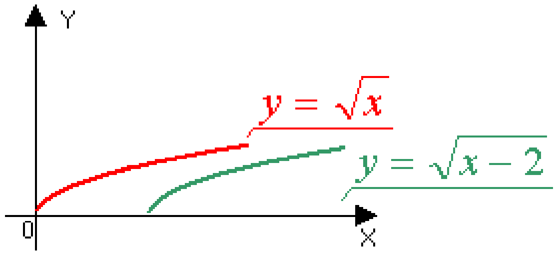


Рис.8. Преобразованный график функции $y = \sqrt{x}$

Для более наглядного представления построим графики исходной функции и преобразованной в одной плоскости:

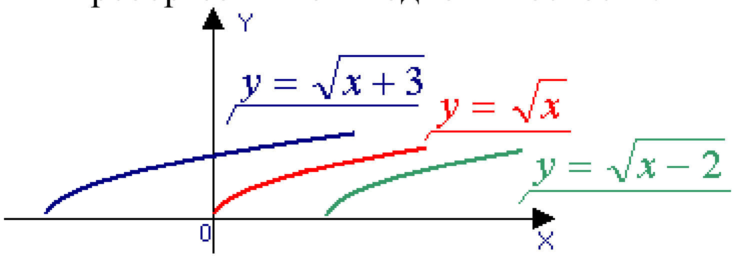


Рис.9. Преобразованный график функции $y = \sqrt{x}$

Алгоритм построения графиков функций в электронных таблицах Excel

1. Введите значения х из заданного промежутка с выбранным шагом;
2. Рассчитайте значения у по формуле;
3. Выделить диапазон ячеек, содержащих данные;
4. Запустить Мастер диаграмм <u>(Вставка- Диаграмма);</u>
5. Выбрать тип диаграммы *ТОЧЕЧНАЯ;*
6. Уточнить детали отображения диаграммы;
7. Определить, где разместить диаграмму.

Запустите программу обработки электронных таблиц Excel.

Построить график функции $y=x^2$ на промежутке[-4;4] с шагом 1

- Создайте таблицу по образцу

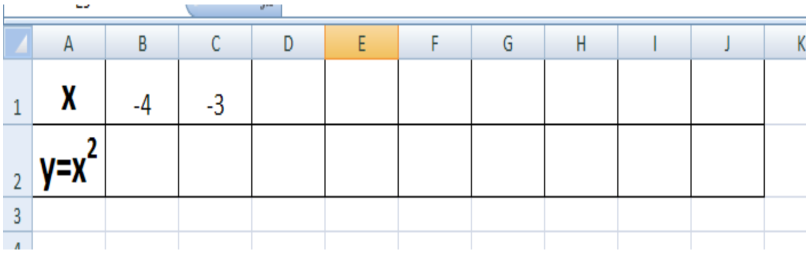


Рис.10. Построение графика функции $y = x^2$

- С помощью автозаполнения заполните остальные значения х
- В ячейку В4 введите формулу для расчёта $y=x^2$
- Выделите диапазон ячеек A1:J2
- Выберите команду Вставка-Диаграмма.
- В появившемся окне выберите Тип диаграммы выберите Точечная-С гладкими кривыми и маркерами
- Зайдите в меню Работа с диаграммами- Макет
- Используя Название диаграммы, Названия осей, Оси, Сетка приведите внешний вид получившегося графика к математическому виду (подпишите название графика функции, оси х и у, разлинуйте рабочее поле на клеточки, оформите основные оси стрелочками)

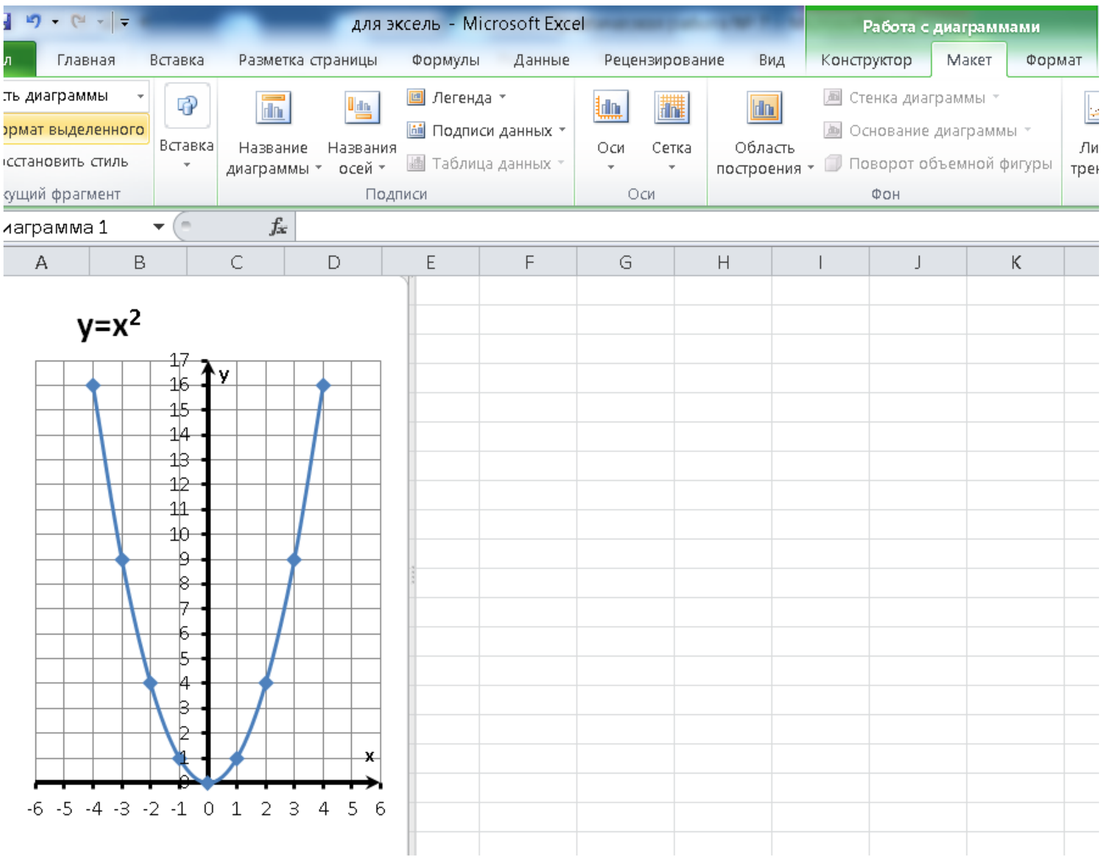


Рис.11. График функции $y = x^2$ *в электронных таблицах Excel*

Форма контроля: отчет

Практическая работа №3

Решение показательных и логарифмических уравнений и неравенств

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: Закрепление полученных знаний и умений при решении показательных и логарифмических уравнений и неравенств.

Задание:

1. Решить показательное уравнение в задании 1-7.
2. Решить показательное неравенство в задании 8,9.
3. Решить логарифмические уравнения, используя определения логарифма.
4. Решить логарифмические уравнения методом замены переменной.
5. Решить логарифмические уравнения, используя свойства логарифмов.
6. Решить логарифмические неравенства.

Задания по вариантам:

*Вариант*1	*Вариант*2	*Вариант*3	*Вариант*4
1. $2^{26-x}=4$	1. $2^{2-x}=4$	1. $3^{x+3}=\frac{1}{9}$	1. $2^{4-x}=4$
2. $8=4^{\frac{1}{26x+1}}$	2. $8=4^{\frac{1}{2x+1}}$	2. $4=2^{\frac{3x-1}{3x-2}}$	2. $8=4^{\frac{1}{4x+1}}$
3. $\left(\frac{12}{41}\right)^{\frac{x}{26}+1}=\left(\frac{51}{41}\right)^{\frac{x}{26}+1}$	3. $\left(\frac{12}{17}\right)^{\frac{x}{2}+1}=\left(\frac{5}{20}\right)^{\frac{x}{2}+1}$	3. $\left(\frac{7}{5}\right)^{3x-10}=\left(\frac{1}{4}\right)^{3x-10}$	3. $\left(\frac{12}{17}\right)^{\frac{x}{4}+1}=\left(\frac{7}{22}\right)^{\frac{x}{4}+1}$
4. $14^{26x}-14^{26x-1}=13$	4. $2^{2x}-2^{2x-1}=1$	4. $6^{\frac{2x}{3}-1}+6^{\frac{2x}{3}}=7$	4. $3^{4x}-3^{4x-1}=2$
5. $\left(\frac{7}{8}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\sqrt[26]{\frac{8}{7}}$	5. $\left(\frac{38}{48}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\sqrt{\frac{48}{38}}$	5. $4^{x-1}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}$	5. $\left(\frac{36}{46}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\sqrt[4]{\frac{46}{36}}$
6. $2^{x}+2^{x-3}=18$	6. $3^{x}+4\cdot 3^{x+1}=13$	6. $0{,}5^{3-2x}+3\cdot 0{,}25^{1-x}=7$	6. $3\cdot 2^{x+1}-6\cdot 2^{x-1}=12$
7. $4^{x}-6\cdot 2^{x}+8=0$	7. $9^{x}+3\cdot 3^{x}-18=0$	7. $9^{x}-6\cdot 3^{x}-27=0$	7. $9^{x}-2\cdot 3^{x}=63$
8. $\frac{1}{2}^{2x-1}>\frac{1}{16}$	8. $\left(\frac{1}{4}\right)^{x-3}\le\frac{1}{16}$	8. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x-4}\le\frac{1}{125}$	8. $49^{2x}>\frac{1}{7}$
9. $5^{x^2-2x-8}\ge 1$	9. $\left(\frac{2}{5}\right)^{x^2-8x=15}\ge 1$	9. $5^{4x-x^2+2}>\frac{1}{125}$	9. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-2x-10}>9$

*Вариант*5 1. $3^{x+5}=\frac{1}{9}$ 2. $4=2^{\frac{5x-1}{5x-2}}$ 3. $\left(\frac{13}{5}\right)^{5x-10}=\left(\frac{1}{6}\right)^{5x-10}$ 4. $8^{\frac{2x}{5}-1}+8^{\frac{2x}{5}}=9$ 5. $6^{x-1}=\frac{1}{\sqrt[5]{6}}$ 6. $2\cdot 3^{x-6}+6\cdot 9^{0,5x-2}=56$ 7. $4^{x}-14\cdot 2^{x}-32=0$ 8. $(0,5)^{x-3}\ge(0,25)^{3x}$ 9. $0,5^{x^2-4x}\le 8$	*Вариант*6 1. $2^{6-x}=4$ 2. $8=4^{\frac{1}{6x+1}}$ 3. $\left(\frac{12}{21}\right)^{\frac{x}{6}+1}=\left(\frac{11}{24}\right)^{\frac{x}{6}+1}$ 4. $4^{6x}-4^{6x-1}=3$ 5. $\left(\frac{34}{44}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\sqrt[6]{\frac{44}{34}}$ 6. $4\cdot 9^{1,5x-1}-27^{x-1}=33$ 7. $4^{x}-3\cdot 2^{x}=40$ 8. $5^{4x-7}>1$ 9. $\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2-2x-10}>25$	*Вариант*7 1. $3^{x+7}=\frac{1}{9}$ 2. $4=2^{\frac{7x-1}{7x-2}}$ 3. $\left(\frac{19}{5}\right)^{7x-10}=\left(\frac{1}{8}\right)^{7x-10}$ 4. $10^{\frac{2x}{7}-1}+10^{\frac{2x}{7}}=11$ 5. $8^{x-1}=\frac{1}{\sqrt[7]{8}}$ 6. $5^{x}-7\cdot 5^{x-2}=90$ 7. $4^{x^2+2}-9\cdot 2^{x^2+2}+8=0$ 8. $2^{2x-9}<1.$ 9. $4^{x^2-2x}\ge 64$	*Вариант*8. 1. $2^{8-x}=4$ 2. $8=4^{\frac{1}{8x+1}}$ 3. $\left(\frac{12}{23}\right)^{\frac{x}{8}+1}=\left(\frac{15}{26}\right)^{\frac{x}{8}+1}$ 4. $5^{8x}-5^{8x-1}=4$ 5. $\left(\frac{32}{42}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\sqrt[8]{\frac{42}{32}}$ 6. $5^{x+1}-3\cdot 5^{x-2}=122$ 7. $4^{x}-9\cdot 2^{x}+8=0$ 8. $0,7^{x}<2\frac{2}{49}$ 9. $0,4^{x^2-x-20}<1$
*Вариант*9 1. $3^{x+9}=\frac{1}{9}$ 2. $4=2^{\frac{9x-1}{9x-2}}$ 3. $5^{9x-10}=\left(\frac{1}{10}\right)^{9x-10}$ 4. $12^{\frac{2x}{9}-1}+12^{\frac{2x}{9}}=13$ 5. $10^{x-1}=\frac{1}{\sqrt[9]{10}}$ 6. $3^{x+1}-4\cdot 3^{x-2}=69$ 7. $5^{2x}-4\cdot 5^{x}-5=0$ 8. $0,9^{x}\ge 1\frac{19}{81}$ 9. $\left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-5x}<1$	*Вариант*10 1. $2^{10-x}=4$ 2. $8=4^{\frac{1}{10x+1}}$ 3. $\left(\frac{12}{25}\right)^{\frac{x}{10}+1}=\left(\frac{25}{26}\right)^{\frac{x}{10}+1}$ 4. $6^{10x}-6^{10x-1}=5$ 5. $\left(\frac{30}{40}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\sqrt[10]{\frac{40}{30}}$ 6. $7\cdot 5^{x}-5^{x+1}=2\cdot 5^{-3}$ 7. $2^{2x+1}+2^{x+2}=16$ 8. $0,7^{x}<2\frac{2}{49}$ 9. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2x+8-x^2}\ge 1$	*Вариант*11 1. $3^{x+11}=\frac{1}{9}$ 2. $4=2^{\frac{11x-1}{11x-2}}$ 3. $\left(\frac{31}{5}\right)^{11x-10}=\left(\frac{1}{12}\right)^{11x-10}$ 4. $14^{\frac{2x}{11}-1}+14^{\frac{2x}{11}}=15$ 5. $12^{x-1}=\frac{1}{\sqrt[11]{12}}$ 6. $2^{x+3}-5\cdot 2^{x}=3\cdot 2^{-1}$ 7. $4^{x}+2^{x+1}=80$ 8. $49^{2x}>\frac{1}{7}$ 9. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-3x+2}<1$	*Вариант*12 1. $2^{12-x}=4$ 2. $8=4^{\frac{1}{12x+1}}$ 3. $\left(\frac{12}{27}\right)^{\frac{x}{12}+1}=\left(\frac{23}{30}\right)^{\frac{x}{12}+1}$ 4. $7^{12x}-7^{12x-1}=6$ 5. $\left(\frac{28}{38}\right)^{\frac{x-1}{2}}=\sqrt[12]{\frac{38}{28}}$ 6. $7^{x+1}-3\cdot 7^{x}=28$ 7. $2^{2x}+4\cdot 7^{x}=5$ 8. $\frac{1}{2}^{2x-1}>\frac{1}{16}$ 9. $3^{x^2-x-12}\ge 1$

Вариант 1,5,9

Решить уравнения:

1) $\log_4 x=-\frac{1}{2}$; 2) $\log_3(7x-3)=0$; 3) $\log_2^2 x-13\log_2 x+36=0$;

4) $\log_2(x-5)+\log_2(2+x)=3$;

5) $\log_4 x+\log_{64} x=4$; 6) $\log_5(2x+3)=\log_5(x+1)$;

7) $\log_2\frac{x-1}{x+4}+\log_2(x-1)(x+4)=\log_2 4$;

8) $\log_{x-1}(x^2-7x+41)=2.$

Решить неравенства:

1) $\log_{\frac{1}{3}}(x-5) > -2;$ 2) $\log_2(x+2) < 1;$ 3) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > 0.$

Вариант 2,6,10

Решить уравнения:

1) $\log_{16} x = -\frac{1}{2};$ 2) $\log_4(2x+5) = 0;$ 3) $4\log_3^2 x + 7\log_3 x - 2 = 0;$

$4\log_2(2x-10) + \log_2(4+2x) = 3;$

5) $\log_5 x + \log_{125} x = 4;$ 6) $\log_6(3+2x) = \log_6(x+1);$

7) $\log_2 \frac{x-1}{3x-8} + \log_2(x-1)(3x-8) = \log_2 4;$

8) $\log_{x+2}(3x^2 + 4x - 14) = 2.$

Решить неравенства:

1) $\log_{\frac{1}{4}}(x+6) > -2;$ 2) $\log_9(x-3) < 1;$ 3) $\log_{\frac{1}{4}}(x+2) > 0.$

Вариант 3,7,11

Решить уравнения:

1) $\log_{25} x = -\frac{1}{2};$ 2) $\log_7(x-2) = 0;$ 3) $\log_6^2 x - 6\log_6 x + 8 = 0;$

4) $\log_2(x+2) + \log_2(x-5) = 3;$

5) $\log_3 x + \log_{81} x = 5;$ 6) $\log_4(1+x) = \log_4(2x+3);$

7) $\log_2 \frac{x-1}{x+7} + \log_2(x-1)(x+7) = \log_2 4;$

8) $\log_{x+2}(3x^2 + 4x - 14) = 2.$

Решить неравенства:

1) $\log_{0,1}(x-8) > -2;$ 2) $\log_8(x+3) < 1;$ 3) $\log_{\frac{1}{7}}(x+4) > 0.$

Вариант 4,8,12

Решить уравнения:

1) $\log_{36} x = -\frac{1}{2};$ 2) $\log_7(2x-3) = 0;$ 3) $\log_5^2 x - 5\log_5 x - 36 = 0;$

4) $\log_4(2x+4) + \log_4(2x-10) = 3;$ 5) $\log_2 x + \log_{16} x = 5;$

6) $\log_3(x+1) = \log_3(2x+3);$

7) $\log_3 \frac{x-1}{4+3x} + \log_3(x-1)(4+3x) = \log_3 4;$

8) $\log_{x+2}(3x^2 + 4x - 14) = 2.$

Решить неравенства:

1) $\log_{0,2}(x-3) > -2;$ 2) $\log_2(x+2) < 1;$ 3) $\log_{\frac{1}{3}}(x+4) > 0.$

Методические указания:

Определение: Показательным уравнением называется уравнение, содержащее переменную в показателе степени.

При решении показательных уравнений необходимо помнить, что решение любого показательного уравнения сводится к решению “простейших” показательных уравнений, то есть уравнений вида:

1) $a^{f(x)} = a^{g(x)}$ *, значит* $f(x) = g(x)$ *или 2)* $a^{f(x)} = b$.

Показательные неравенства

При решении показательных неравенств используются те же приемы, что при решении показательных уравнений.

Показательное неравенство: $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$, равносильно неравенству:

при $a>1$	при $0<a<1$
$f(x)>\varphi(x)$	$f(x)<\varphi(x)$

1вид: $16^{x+6} = 64$

$(4^2)^{x+6}=4^3$

$4^{2x+12} = 4^3$

$2x + 12 = 3$

$2x = -9$

$x = -4{,}5$

Ответ: - 4,5.

2вид: Разложение на множители путём вынесения общего множителя за скобки: $3^{x+3} – 3^x =78$

Избавляемся от числовых слагаемых в показателях степеней

$3^x \cdot 3^3 – 3^x = 78$

Выносим общий множитель за скобки

$3^x (27 - 1) = 78$

$3^x = 78 : 26$

Решаем простейшее показательное уравнение.

$3^x = 3^1$; $x = 1$ Ответ: 1

3вид: Способ подстановки:

$2^{2x+1} – 9 \cdot 2^x +4 = 0$

Избавляемся от числовой добавки в показателе степени.

$2^{2x} \cdot 2 – 9 \cdot 2^x+4 = 0$

Выполняем замену переменной.

Пусть $2^x = t$, тогда

$2t^2 - 9t + 4 = 0$

Решаем квадратное уравнение.

$D = 49$

$t_1 = 4$, $t = ½$

Выполняем обратную замену.

Значит $2^x = 2^2$ $\quad$ $2^x = 2^{-1}$

$x=2$ $\quad$ $x=-1$

Ответ: -1; 2

4вид: Способ почленного деления.

$5^x - 4^x = 0$

Делим на выражение, содержащее показательную функцию.

$\frac{5^x}{4^x} - \frac{4^{\ x}}{4^x} = 0 \quad 4^x \neq 0$

Решаем простейшее показательное уравнение.

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x - 1 = 0$$

$$\left(\frac{5}{4}\right)^x = \left(\frac{5}{4}\right)^0$$

x = 0

Ответ: 0

Решить неравенство $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > 25.$

Решение: Неравенство равносильно следующему: $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{x^2+2}{x^2-1}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-2}$. Так как $\frac{1}{5} < 1$, то функция $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ убывает. Значит, исходное неравенство равносильно следующему: $\frac{x^2+2}{x^2-1} < -2$. Решая полученное неравенство методом интервалов, получаем ответ: $x \in (-1;0) \cup (0;1)$.

Решаются приведением обеих частей неравенства к степени с одинаковым основанием.

1. Решить неравенство $2^{x^2} > 2^{x+2}$.

Решение: $2^{x^2} > 2^{x+2}$;

$x^2 > x+2$, т.к. функция $y = 2^t$ возрастает,

$x^2 - x - 2 > 0$;

$x^2 - x - 2 = 0$; x=2, x= -1.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (2; +\infty)$.

Определение: Уравнения, содержащие переменную под знаком логарифма, называются логарифмическими.

$$\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2 + 6\right) = -2$$

По определению логарифма можно записать,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = x^2 + 6$$

$$x^2 + 6 = 16$$

$$x^2 + 6 - 16 = 0$$

$$x^2 - 10 = 0$$

$$x = \pm\sqrt{10}$$

надо помнить, что логарифма отрицательных чисел не существует. Так как $x^2+6>0$ всегда, то полученные значения $x=\pm\sqrt{10}$ оба являются корнями уравнения. Ответ: $\pm\sqrt{10}$

1) По определению логарифма, можно решить уравнение:

$$\log_5\left(6-5^x\right)=1-x \text{; отсюда } 5^{1-x}=6-5^x$$

получили показательное уравнение $5\cdot5^{-x}=6-5^x$, решим его: $\frac{5}{5^x}=6-5^x$

приведём к общему знаменателю $5^x\neq0 \Rightarrow 5=\left(6-5^x\right)\cdot5^x \qquad 5=6\cdot5^x-\left(5^x\right)^2$

Обозначим $5^x=t$, получим

$5=6t-t^2; \qquad t^2-6t+5=0$

$D=36-20=16$

$t_{1,2}=\frac{6\pm4}{2}; \quad t_1=5; \quad t_2=1$ и тогда $5^x=5 \Rightarrow x=1; \quad 5^x=1; \quad 5^x=5^0; \quad x=0$

.

Ответ: $x=1 \quad x=0$

2) $\lg(3x-2)+\lg2=2-\lg(x+1)$

Используя определение логарифма, можно число 2 записать $2=\lg100$ и тогда имеем равносильное уравнение $\lg(3x-2)+\lg2=\lg100-\lg(x+1)$. Применим свойства логарифмов и тогда отсюда следует, что $2(3x-2)=\frac{100}{x+1}$ решаем уравнение при $x\neq-1$

$2(3x-2)(x+1)=100, (3x-2)(x+1)=50, 3x^2-2x+3x-2=50,$

$3x^2-x-52=0, D=1+4\cdot3\cdot52=625$

$x_{1,2}=\frac{-1\pm25}{6}; x_1=4; x_2=-\frac{13}{3}.$

потенцирование выражений может привести к появлению посторонних корней, поэтому полученные корни нужно проверить.

Проверка:

$x=4$

$\lg10+\lg2=\lg100-\lg5$

$10\cdot2=\frac{100}{5}$

$20=20$ верно.

$x=-\frac{13}{3}$ – посторонний корень, так как логарифма отрицательных чисел не существует.

Ответ: $x=4$.

Можно указать другой метод нахождения корней уравнения, указать область допустимых значений переменной (ОДЗ).

По свойству логарифмов:

$$\begin{cases} 3x-2>0 \\ x+1>0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x>2 \\ x>-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>\dfrac{2}{3} \\ x>-1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x>\frac{2}{3} \qquad x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$$

и тогда можно сказать, что ОДЗ удовлетворяет корень $x = 4$. Проверив этот корень, получаем верное равенство.

Замечание. Пользоваться указанием ОДЗ удобно для более простых выражений, стоящих под знаком логарифма.

При решении уравнения применяется метод решения, известный как метод потенцирования.

4)

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)+2=-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$$

т.к. $2=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

Используя свойства логарифмов имеем $\log_{\frac{1}{2}}\left((2x-3)\cdot\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)^{-1}$

$$\frac{1}{4}(2x-3)=\frac{1}{x+2}, \qquad x\neq-2$$

$$\frac{1}{4}(2x-3)(x+2)=1 \qquad\qquad (2x-3)(x+2)=4$$

и тогда $\quad 2x^2-3x+4x-6-4=0 \qquad\qquad 2x^2+x-10=0$

$$D=1+80=81$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm9}{4}; \quad x_1=2; \ x_2=-2,5$$

Проверка:

$x=2$

$$\log_{\frac{1}{2}}1+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=-\log_{\frac{1}{2}}4$$

$$1\cdot\frac{1}{4}=4^{-1}$$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ верно.

$x = –2,5$ – посторонний корень, так как логарифма отрицательных чисел не существует.

Ответ: $x=2$

5) $x^{2\lg x-1,5}=\sqrt{10}$

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10, получаем равносильные ему логарифмическое уравнение

$$\left(2\lg x-1{,}5\right)\cdot\lg x=\frac{1}{2}\lg 10$$

$$2\lg^2 x-1{,}5\lg x=\frac{1}{2}\cdot 1$$

$$2\lg^2 x-1{,}5\lg x-\frac{1}{2}=0$$

$$4\lg^2 x-3\lg x-1=0$$

Получаем квадратное уравнение относительно $\lg x$

Пусть $\lg x=t$, тогда $4t^2-3t-1=0$

$D=9+16=25;\qquad t_{1,2}=\dfrac{3\pm 5}{8}$

$$t_1=1;\quad t_2=-\frac{2}{8}=-\frac{1}{4}$$

И тогда $\lg x=1\ \Rightarrow\ x=10$

если $\lg x=-\dfrac{1}{4}$, то $x=10^{-\frac{1}{4}}$ $x=10^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{10}}$

Ответ: 10; $\dfrac{1}{\sqrt[4]{10}}$.

6) $2\log_x 25-3\log_{25} x=1$

Приведём логарифмы к одинаковому основанию. Известно, что $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ и тогда

$2\cdot\dfrac{1}{\log_{25} x}-3\log_{25} x=1$ <u>ОДЗ</u>: $x>0\quad x\neq 1$

$$2-3\left(\log_{25} x\right)^2=\log_{25} x$$

$$3\log_{25}^2 x+\log_{25} x-2=0$$

Пусть $\log_{25} x=t,\qquad 3t^2+t-2=0$

$D=1+24=25;\qquad t_{1,2}=\dfrac{-1\pm 5}{6};$

$t_1=-1;\qquad t_2=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

И тогда $\log_{25} x=-1\qquad x=25^{-1}=\dfrac{1}{25};$

Если $\log_{25} x=\dfrac{2}{3}$, то $x=25^{\frac{2}{3}}=5^{\frac{4}{3}}=5^{1\frac{1}{3}}=5\sqrt[3]{5}$

Ответ: $\dfrac{1}{25};\quad 5\sqrt[3]{5}$

7) $\log_2\left(2-x\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(x-1\right)=\log_{\sqrt{2}} 3$

Приведём логарифмы к одинаковому основанию. Так как $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$, то

$\log_2(2-x)+\log_{2^{-1}}(x-1)=\log_{2^{\frac{1}{2}}} 3$ ОДЗ:

$\log_2(2-x)-\log_2(x-1)=2\log_2 3$ $\begin{cases} 2-x>0 \\ x-1>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x<2 \\ x>1 \end{cases}$ $x \in (1;2)$

Используем свойства логарифма и получим

Проверка:

$x=1{,}1$

$\log_2 0{,}9+\log_{\frac{1}{2}} 0{,}1=\log_{\sqrt{2}} 3$

$\log_2 0{,}9-\log_2 0{,}1=2\log_2 3$

$\frac{0{,}9}{0{,}1}=9$

$9=9$ верно.

$\frac{2-x}{x-1}=3^2$ $x \neq 1$

$2-x=9(x-1)$

$2-x=9x-9;\ \ 2-x-9x+9=0$

$-10x=-11;\ \ \ 10x=-11$

$x=1{,}1$

Решение неравенств:

1) $\log_{\frac{1}{4}}(3-2x)>-1$, т.к. $-1=\log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}=\log_{\frac{1}{4}} 4>0$

$\log_{\frac{1}{4}}(3-2x)>\log_{\frac{1}{4}} 4$

Учитывая, что $\frac{1}{4}<1$, то есть функция убывающая, имеем:

$\begin{cases} 3-2x<4 \\ 3-2x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} -2x<4-3 \\ -2x>-3 \end{cases}$ $\begin{cases} x>-\frac{1}{2} \\ x<\frac{3}{2} \end{cases}$

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$

Форма контроля: отчет

Практическая работа №4

Преобразование тригонометрических выражений

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: Закрепление полученных знаний по теме «Тригонометрия» при применении основных тригонометрических тождеств для преобразования выражений.

Задание:

1. Выразить в радианной мере величины углов.
2. Выразить в градусной мере величины углов.
3. Вычислить значения тригонометрических функций.
4. Доказать тригонометрическое тождество.
5. Вычислить значения тригонометрического выражения с помощью формул сложения и вычитания одноименных функций.
6. Упростить тригонометрическое выражение.

Задания по вариантам.

Вариант 1,5,9,13,17.

1. Выразите в радианной мере величины углов 64^0; 160^0.

2. Выразите в градусной мере величины углов $\frac{3\pi}{5}$, $1\frac{3}{4}\pi$.

3.Известно, что $\sin t = 0,6, \pi < t < \frac{3\pi}{2}$. Вычислите: $\cos t, tgt, ctgt.$.

4.Докажите тождество: $\frac{tg(-t)}{tgt + ctgt} = -\sin^2 t$

5.Вычислите: $\cos 85^0 \cos 5^0 - \sin 85^0 \sin 5^0$.

6.Упростите выражение: $\frac{\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha - \sin\alpha}{4\sin\alpha}$

7.Докажите тождество:

$$tg(\pi - \alpha)\left(1 + tg\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)ctg\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha\right)\right) = tg(2\pi - \alpha) - ctg\left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha\right)$$

Вариант 2,6,10,14,18.

1. Выразите в радианной мере величины углов 56^0; 170^0.

2. Выразите в градусной мере величины углов $\frac{5\pi}{6}$, $2\frac{1}{6}\pi$.

3. Известно, что $\cos t = 0,8, 0 < t < \frac{\pi}{2}$. Вычислите: $\sin t, tgt, ctgt.$

4. Докажите тождество: $\dfrac{2\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=-\operatorname{tg}2\alpha$.

5. Вычислите: $\cos 53^0\cos 8^0+\sin 53^0\sin 8^0$.

6. Упростите выражение: $\dfrac{6\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{2\cos^2\alpha-1}$.

7. Докажите тождество: $\dfrac{\sin(\alpha+\pi)}{\sin\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)}+\dfrac{\cos(3\pi-\alpha)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-1}=\dfrac{1}{\cos\alpha}$.

Вариант 3,7,11,15,19.

1. Выразите в радианной мере величины углов 72^0; 140^0.

2. Выразите в градусной мере величины углов $\dfrac{11\pi}{12}$, $\dfrac{23}{8}\pi$.

3. Известно, что $\sin\alpha=\dfrac{5}{13}$, $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.Найдите *cosα, tgα* и *ctgα.*

4. Докажите тождество: $\dfrac{ctg(-t)}{tgt+ctgt}=-\cos^2 t$.

5. Вычислить: $\cos 80^0\cos 10^0-\sin 80^0\sin 10^0$.

6. Упростите выражение: $\dfrac{\cos\alpha-\sin\alpha}{2\sin\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

7. Докажите тождество: $\dfrac{\sin(-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=ctg\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)tg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)$.

Вариант 4,8,12,16,20.

1. Выразите в радианной мере величины углов 42^0; 130^0.

2.Выразите в градусной мере величины углов $\dfrac{7\pi}{12}$, $\dfrac{21}{4}\pi$.

3. Известно, что $\cos\alpha=-\dfrac{3}{5}$, $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$.Вычислите: $\sin\alpha, tg\alpha, ctg\alpha$.

4. Докажите тождество: $\dfrac{2\sin^2\alpha}{\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha}=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

5. Вычислите: $\cos 51^0\cos 6^0+\sin 51^0\sin 6^0$.

6. Упростите выражение: $\dfrac{8\cos\alpha\cdot\sin\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}$

7. Докажите тождество: $\dfrac{\cos(-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=tg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

Методические указания:

Основные формулы тригонометрии

Перевод градусной меры угла в радианную и обратно. Пусть α° - градусная мера угла, β - радианная, тогда справедливы формулы:

$\beta=\dfrac{\pi\cdot\alpha^\circ}{180^\circ}$ $\qquad\qquad$ $\alpha^\circ=\dfrac{180^\circ\cdot\beta}{\pi}$

Формулы зависимости между функциями одного и того же аргумента

1.	$\sin^2\alpha+\cos^2\beta=1$	4.	$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$
2.	$\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	5.	$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$
3.	$\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$	6.	$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

Формулы сложения

$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta\pm\cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta\mp\sin\alpha\cdot\sin\beta$

$tg(\alpha+\beta)=\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\, tg\beta}$

$tg(\alpha-\beta)=\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\, tg\beta}$

$ctg(\alpha+\beta)=\dfrac{ctg\alpha\, ctg\beta-1}{ctg\alpha+ctg\beta}$

$ctg(\alpha-\beta)=\dfrac{ctg\alpha\, ctg\beta+1}{ctg\beta-ctg\alpha}$

Формулы двойных и половинных углов

1.	$\sin 2\alpha=2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha$	5.	$\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$
2.	$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$	6.	$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$

3.	$\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$	7.	$\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$
4.	$\sin 2\alpha = \dfrac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$	8.	$\cos 2\alpha = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$

Формулы преобразования суммы в произведение

$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha \cdot \cos\beta}$
$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cdot \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	
$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$1 - \cos\alpha = 2 \cdot \sin^2\dfrac{\alpha}{2}$
$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \sin\dfrac{\alpha+\beta}{2} \cdot \sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$	$1 + \cos 2\alpha = 2 \cdot \cos^2\dfrac{\alpha}{2}$

1. Найти значение следующих тригонометрических выражений:

$\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ $\operatorname{tg} 2\alpha$, если $\sin\alpha = \dfrac{4}{5};\ 0 < \alpha < \pi$.

Решение. Выпишем формулы для нахождения $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$ $\operatorname{tg} 2\alpha$:

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$, $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$,

$$\cos^2 = 1 - 2 \cdot \frac{16}{25} = 1 - \frac{32}{25} = -\frac{7}{25} \quad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Из основного тригонометрического тождества найдем $\cos\alpha$:

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha} \quad = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5};$$

Далее найдем значения искомых выражений:

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{24}{25}; \qquad \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{\frac{24}{25}}{-\frac{7}{25}} = -\frac{24}{7};$$

Ответ: $\sin 2\alpha = \dfrac{24}{25}$, $\cos 2\alpha = -\dfrac{7}{25}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = -\dfrac{24}{7}$.

2. Доказать тождество:

$$\left(1 + \operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{1}{\operatorname{ctg}^2\alpha}\right) \cdot \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1;$$

Решение. Приведем левую часть к 1:

$$\left(1+\mathrm{ctg}^2\alpha+\frac{1}{\mathrm{ctg}^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\left(\frac{1}{\sin^2\alpha}+\frac{1}{\cos^2\alpha}\right)\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=$$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}\cdot\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

Тождество доказано.

3. Вычислить значение выражения:

$$\sin\frac{8\pi}{3}\cdot\mathrm{ctg}\frac{11\pi}{6}+\cos\frac{29\pi}{6}\cdot\mathrm{tg}\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{\cos\frac{23\pi}{3}\cdot\sin\frac{11\pi}{6}}+7$$

Решение. Используя формулы приведения, получим:

$$\sin\frac{8\pi}{3}\cdot\mathrm{ctg}\frac{11\pi}{6}+\cos\frac{29\pi}{6}\cdot\mathrm{tg}\frac{4\pi}{3}+\frac{1}{\cos\frac{23\pi}{3}\cdot\sin\frac{11\pi}{6}}+7=$$

$$=\sin\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)\cdot\mathrm{ctg}\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(5\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\mathrm{tg}\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+\frac{1}{\cos\left(8\pi-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)}+7=$$

$$=\sin\frac{2\pi}{3}\cdot\mathrm{ctg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cdot\mathrm{tg}\frac{\pi}{3}+\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}+7=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\left(-\sqrt{3}\right)+\left(-\cos\frac{\pi}{6}\right)\cdot\sqrt{3}+\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}+7=-\frac{3}{2}-\frac{3}{2}-4+7=0.$$

Форма контроля: отчет

Практическая работа №5

Решение тригонометрических уравнений

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: Систематизация и закрепление теоретического материала; формирование умений решать тригонометрические уравнения различными способами.

Задание:

1. Решить простейшие тригонометрические уравнения.
2. Решить однородные тригонометрические уравнения
3. Решить тригонометрические уравнения методом замены переменной.
4. Решить тригонометрические уравнения, левая часть которых разлаживается на множители.

Задания по вариантам:

Вариант 1,5,9,13,17	Вариант 2,6,10,14,18
1) $tg 2x = \sqrt{3}$	1) $ctg 2x = \sqrt{3}$
2) $\sin(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}) = 1$	2) $\sin(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}) = 1$
3) $2\cos(4x + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{3}$	3) $2\cos(2x - \frac{\pi}{2}) = \sqrt{3}$
4) $\sin \frac{\pi}{2} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$	4) $\sin \frac{\pi}{3} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
5) $\sin x^2 = 0$	5) $\sin x^2 = 0$
6) $tg^2 x = \frac{1}{3}$	6) $ctg^2 x = \frac{1}{3}$
7) $6\sin^2 x + 7\sin x - 3 = 0$	7) $\sin^2 x - 4\sin x + 4 = 0$
8) $3\sin^2 x + \cos^2 x - 2 = 0$	8) $7\sin^2 x - 5\cos^2 x + 2 = 0$
9) $2\cos^2 x + 3\sin x = 0$	9) $3\sin x = 2\cos^2 x$
10) $\cos 2x + \cos x = 0$	10) $\cos 2x = -\cos x$

Вариант 3,7,11,15,19	Вариант 4,8,12,16,20
1) $ctg \frac{x}{3} = -1$	1) $tg \frac{x}{3} = -1$
2) $\cos(\frac{\pi}{4} - x) = \frac{1}{2}$	2) $\cos(\frac{\pi}{3} - x) = \frac{1}{2}$

3) $\sin\frac{\pi}{2}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$	3) $\sin\frac{\pi}{3}x=\frac{\sqrt{2}}{2}$
4) $\cos x^2=0$	4) $\cos x^2=0$
5) $ctg^2 x=3$	5) $tg^2 x=3$
6) $2\cos^2 x-3\cos x-2=0$	6) $6\cos^2 x+7\cos x-3=0$
7) $2\cos^2 x+4\sin^2 x=3$	7) $3\sin^2 x-\cos^2 x=0$
8) $\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+3\cos^2 x=0$	8) $\sin^2 x-6\sin x\cdot\cos x+5\cos^2 x=0$
9) $4\cos^2 x+\sin x-1=0$	9) $4\sin^2 x+\cos x-1=0$
10) $\sin 2x-\cos x=0$	10) $\sin 2x+4\sin x=0$

Методические указания:

Решение тригонометрических уравнений:

Уравнение	Общее решение	Частные случаи		
		$a=-1$	$a=0$	$a=1$
$\sin x=a$, $\lvert a\rvert\le 1$	$x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n$	$x=\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$
$\cos x=a$, $\lvert a\rvert\le 1$	$x=\pm\arccos a+2\pi n$	$x=\pi+2\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=2\pi n$
$\operatorname{tg} x=a$, $a\in(-\infty;\infty)$	$x=\operatorname{arctg} a+\pi n$	$x=-\frac{\pi}{4}+\pi n$	$x=\pi n$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$
$\operatorname{ctg} x=a$, $a\in(-\infty;\infty)$	$x=\operatorname{arcctg} a+\pi n$	$x=\frac{3\pi}{4}+\pi n$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi n$	$x=\frac{\pi}{4}+\pi n$

1. Уравнения, однородные относительно $\sin x$ и $\cos x$.

Решить уравнение: $\sin 2x=1-3\cos^2 x$

<u>Решение.</u> Заменяя $\sin 2x=2\sin x\cos x$ и $1=\sin^2 x+\cos^2 x$, получим однородное уравнение:

$$2\sin x\cos x=\sin^2 x+\cos^2 x-3\cos^2 x,$$

или

$$\sin^2 x-2\sin x\cos x-2\cos^2 x=0.$$

Деля на $\cos^2 x$ ($\cos x\ne 0$), получим:

$$\operatorname{tg}^2 x-2\operatorname{tg} x-2=0.$$

Вводим новую переменную $y = \operatorname{tg} x$ и получаем квадратное уравнение относительно нее:

$$y^2 - 2y - 2 = 0.$$

Корни этого уравнения: $y_{1,2} = 1 \pm \sqrt{3}$. Далее получаем равносильную совокупность уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} x_1 = 1 + \sqrt{3}, \\ \operatorname{tg} x_2 = 1 - \sqrt{3}, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x_1 = \operatorname{arctg}\left(1 + \sqrt{3}\right) + \pi n, \ n \in Z, \\ x_2 = \operatorname{arctg}\left(1 - \sqrt{3}\right) + \pi k, \ k \in Z. \end{array}\right.$$

2. Уравнения, левая часть которых раскладывается на множители, а правая часть равна нулю.

Решить уравнение: $\cos 5x \cos 2x - \cos 7x \cos 4x = 0$.

<u>Решение.</u> Здесь целесообразно использовать формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму. Воспользовавшись этими формулами, получим уравнение:

$$\frac{1}{2}\left(\cos 7x + \cos 3x\right) - \frac{1}{2}\left(\cos 11x + \cos 3x\right) = 0$$

или $\cos 7x - \cos 11x = 0$.

Разность косинусов преобразуем в произведение $2\sin 9x \cdot \sin 2x = 0$, которое равносильно совокупности уравнений:

$$\left[\begin{array}{l} \sin 9x = 0, \\ \sin 2x = 0, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} 9x = \pi n, \\ 2x = \pi k, \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{9} n, \quad n \in Z, \\ x = \dfrac{\pi}{2} k, \ \ k \in Z. \end{array}\right.$$

3. Уравнения вида $a \sin x + b \cos x = c$.

Эти уравнения можно решать при помощи универсальной тригонометрической подстановки $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = z$, воспользовавшись формулами, выражающими $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$:

$$\sin x = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}} \quad \text{и} \quad \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \dfrac{x}{2}}.$$

Решить уравнение: $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2$.

<u>Решение.</u> (первый способ) Заменив $\sin x$ и $\cos x$ через $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}$, получим:

$$\frac{2\cdot\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}+\frac{1-\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\,\frac{x}{2}}-2=0$$
.

Введем новую переменную: $\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=z$ и получим эквивалентное квадратное уравнение относительно z:

$3z^2-2\sqrt{3}z+1=0$,

у которого дискриминант равен нулю и, следовательно, имеем единственный корень $z=\frac{\sqrt{3}}{3}$. Задача свелась к решению уравнения:

$\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$; $x=2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{3}}{3}+\pi n$; $x=\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in Z$.

4. Уравнения, которые можно привести к квадратному уравнению.

Решить уравнение: $2\sin^2 x+5\cos x=4$

уравнение содержит функции одинакового угла, можно привести к квадратному уравнению, если заменить $\sin^2 x=1-\cos^2 x$:

$2\left(1-\cos^2 x\right)+5\cos x=4$

$2-2\cos^2 x+5\cos x-4=0$

$-2\cos^2 x+5\cos x-2=0$

$2\cos^2 x-5\cos x+2=0$

Пусть $\cos x=t$, тогда

$2t^2-5t+2=0$ $\qquad D=25-4\cdot2\cdot2=25-16=9$

$t_{1,2}=\frac{5\pm3}{4};$ $\quad t_1=2$ $\quad t_2=\frac{1}{2}$ и тогда имеем два простейших уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ и $\sin x=2$, решаем их, применяя формулу решения уравнения $\underline{\sin x=a}$

$\sin x\neq2$ уравнение не имеет решения, т.к. $\lvert\sin x\rvert\leq1$

$$\sin x=\frac{1}{2}$$

$$x=\left(-1\right)^n\arcsin\frac{1}{2}+\pi n, n\in Z$$

$$x=\left(-1\right)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$$

И тогда, ответ: $x=\left(-1\right)^n\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$

Форма контроля: отчет

Практическая работа №6

Дифференцирование функций с применением математического программного обеспечения MathCad.

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: Систематизация и закрепление теоретического материала; формирование умений применять формулы производной при решении задач.

Задание:

1. Найти производную функции.
2. Вычислить производную функции в точке.
3. Решить уравнение после нахождения производной функции.

Задания по вариантам:

Вариант 1,5,9,13,17

1) Найти $f'(x)$

1) $f(x) = \ln x - 5\sqrt{x} + 3^x + \frac{1}{6}$

2) $f(x) = (\frac{1}{4}\sin x - 5\sqrt{x})(3\cos x + \frac{1}{6}x)$

3) $f(x) = (2\arcsin x + \frac{10}{x})(\arccos x - 9^x)$

4) $f(x) = \frac{7tgx + x}{x^2 - 14x}$

5) $f(x) = \frac{\log_3 x - 8x}{\ln x + 2}$

2) Вычислить: $f'(1)$; $f'(0)$; $f'(4)$;

1) $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2\sqrt{x} + 3x^5 - \frac{1}{2}x$

2) $f(x) = \frac{2x^2 - x}{6x^2 + 5}$

3) $f(x) = 0{,}25x^{^2} + 10\sqrt{x} - 325 + e^x$

3) Решить уравнение $f'(x)$=0

1) $f(x) = x^3 - 6x^2 - 63x$

2) $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 8x$

3) $f(x) = x^4 + 4x$

Вариант 2,6,10,14,18

1) Найти $f'(x)$

1) $f(x) = \frac{4}{x} - 10\sqrt{x} + 7^x + \frac{1}{9}$

2) $f(x) = (\frac{1}{3}\sin x + 8\sqrt{x})(3\cos x - \frac{1}{5}x)$

3) $f(x) = (6\arcsin x - \frac{8}{x})(\arccos x + 4^x)$

4) $f(x)=\frac{5tgx-2x}{x^2-4x}$

5) $f(x)=\frac{\log_2 x+x}{\ln x-4}$

2) Вычислить: $f'(1)$; $f'(0)$; $f'(9)$;

1) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2\sqrt{x}+3x^4-\frac{1}{4}x$

2) $f(x)=\frac{3x^2+x}{x^2+5}$

3) $f(x)=0{,}25x^{2}+8\sqrt{x}-522+e^x$

3) Решить уравнение $f'(x)=0$

1) $f(x)=x^3-6x^2-63x$

2) $f(x)=3x-5x^2+x^3$

3) $f(x)=x^4-12x^2$

Вариант 3,7,11,15,19

1) Найти $f'(x)$

1) $f(x)=7\ln x+2\sqrt{x}+6^x+\frac{1}{11}$

2) $f(x)=(\frac{1}{2}\sin x+5x)(9\cos x-\frac{1}{8}x)$

3) $f(x)=(\arcsin x-\frac{1}{x})(3\arccos x-9^x)$

4) $f(x)=\frac{3tgx-x}{x^2-12x}$

5) $f(x)=\frac{\log_7 x+4x}{\ln x-2x}$

2) Вычислить: $f'(1)$; $f'(-1)$; $f'(4)$;

1) $f(x)=\frac{1}{4}x^4+2\sqrt{x}+3x^5-\frac{1}{2}x$

2) $f(x)=\frac{2x^2-x}{6x^2-5}$

3) $f(x)=0{,}25x^{2}+12\sqrt{x}-329+e^x$

3) Решить уравнение $f'(x)=0$

1) $f(x)=x^3-6x^2-63x$

2) $f(x)=\frac{2}{3}x^3-8x$

3) $f(x)=x^4+4x$

Вариант 4,8,12,16,20

1) Найти $f'(x)$

1) $f(x)=\frac{7}{x}+4\sqrt{x}-4^x-\frac{1}{11}$; 2) $f(x)=(\frac{1}{5}\sin x-8\sqrt{x})(3\cos x+x)$;

3) $f(x)=(\arcsin x-\frac{2}{x})(\arccos x-4^x)$; 4) $f(x)=\frac{6tgx+22x}{x^2+4x}$; 5) $f(x)=\frac{\log_7 x-x}{x^4-4}$.

2) Вычислить: $f'(1)$; $f'(-1)$; $f'(9)$;

1) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-2\sqrt{x}+3x^5-\frac{1}{9}x$

2) $f(x)=\frac{3x^2+x}{x^2+5}$

3) $f(x)=0{,}25x^2+\sqrt{x}-538+4e^x$

3) Решить уравнение $f'(x)=0$

1) $f(x)=x^3-6x^2-63x$

2) $f(x)=3x-5x^2+x^3$

3) $f(x)=x^4-12x^2$

Методические указания:

Определение производной

Пусть функция y = f(x) определена в промежутке X.

Производной функции y = f(x) в точке x_0 называется предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Производная обозначается символами

y', $f'(x_0)$, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x_0)}{dx}$.

Нахождение производной называется дифференцированием функции.

Правила дифференцирования

Если c - постоянное число, а, u и v - некоторые дифференцируемые функции, то справедливы следующие правила дифференцирования:

1) $(C)'=0$; $(C\cdot u)'=C\cdot u'$;

2) $(u+v)'=u'+v'$;

3) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+v'\cdot u$;

4) $(\frac{u}{v})'=\frac{u'\cdot v-v'\cdot u}{v^2}$.

Таблица производных

1. $(x^n)'=nx^{n-1}$;
2. $(a^x)'=a^x\ln a$;
3. $(e^x)'=e^x$;
4. $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$;
5. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$;
6. $(\sin x)'=\cos x$;
7. $(\cos x)'=-\sin x$;

8. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

9. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

10. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

11. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

12. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

13. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Примеры вычисления производных

1)Найти $f'(x)$

а) $f(x) = (2\sqrt{x} + x)(\sin x - 1)$

$$f'(x) = (2\sqrt{x} + x)'(\sin x - 1) + (2\sqrt{x} + x)(\sin x - 1)' = (2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1)(\sin x - 1) + (2\sqrt{x} + x)\cdot\cos x =$$

$$= (\frac{1}{\sqrt{x}} + 1)\cdot(\sin x - 1) + (2\sqrt{x} + x)\cdot\cos x.$$

б) $f(x) = \dfrac{\frac{1}{3}x^3 - 4x + 2}{x+6}$

$$f'(x) = \frac{(\frac{1}{3}x^3 - 4x + 2)'\cdot(x+6) - (\frac{1}{3}x^3 - 4x + 2)\cdot(x+6)'}{(x+6)^2} = \frac{(\frac{1}{3}\cdot 3x^2 - 4)\cdot(x+6) - (\frac{1}{3}x^3 - 4x + 2)\cdot 1}{(x+6)^2} =$$

$$= \frac{(x^2-4)(x+6) - (\frac{1}{3}x^3 - 4x + 2)}{x^2 + 12x + 36}.$$

в) $f(x) = 2\arcsin x - 4\ln x + 8^x$

$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{4}{x} + 8^x\cdot\ln x.$$

2) Решить уравнение $f'(x)$ =0

$f(x) = 2x^4 + 2x^2$

Решение: $f'(x) = 8x^3 + 4x$

$8x^3 + 4x = 0$

$4x(x^2 + 1) = 0$

$4x = 0;$ $x^2 + 1 = 0$

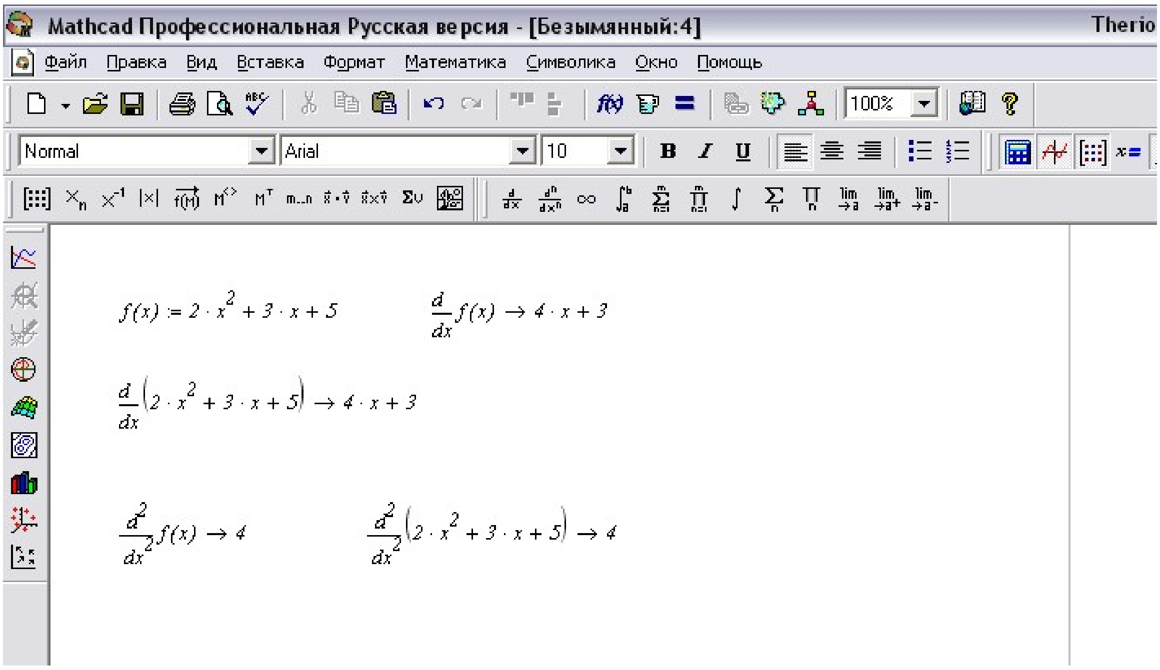
$x = 0.$ $x^2 = -1$

$\varnothing$

Ответ: $x = 0.$

Для вычисления производных необходимо выбрать соответствующую пиктограмму на панели «Исчисление». Заметим, что функция, ставящаяся под производную, может быть, как определена заранее, так и непосредственно под знаком производной. Так же очень важно, что при вычислении производной не возможно равенство правой и левой частей выражения, поэтому следует использовать знак символьных вычислений вместо знака равенства. Он находится на панели «Символика» и выглядит как стрелка направленная в правую сторону.

Для вычисления производных высших порядков MathCAD



предусмотрена функция, которая находит производные n-го порядка. Заполнять плейсхолдеры рекомендуется, начиная со знаменателя, т.е. с той переменной, по которой производится дифференцирование.

Аналитическое вычисление производной

1. **Задайте функцию**, например, f(x) := x^2.
2. **Вставьте оператор производной:**
   - Нажмите кнопку **Derivative** (Производная) на панели **Calculus** (Вычисления).
   - Или нажмите кнопку ? на клавиатуре.
3. **Заполните поля оператора:**
   - В первом поле введите функцию, например, f(x).
   - Во втором поле (знаменатель) введите переменную, по которой берется производная, например, x.
4. **Получите результат:**
   - Установите курсор справа от выражения.
   - Нажмите -> на панели **Symbolics** (Символика).

Форма контроля: отчет

Практическая работа №7

Применение производной к решению геометрических и физических задач

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: Углубление полученных знаний и формирование умений применять формулы производной к решению геометрических и физических задач.

Задание:

1. Найти угловой коэффициент касательной (тангенс угла наклона) к оси абсцисс.
2. Записать уравнение касательной к графику функции.
3. Найти абсциссу точки касания.
4. Найти скорость и ускорение точки.
5. Найти кинетическую энергию.
6. Найти силу, действующую на тело.

Задания по вариантам:

Вариант 1,6,11,16

1. Через точку графика функции $y = f(x)$ с абсциссой x_0 проведена касательная. Найдите угловой коэффициент касательной к оси абсцисс, если $y = 3x^2 + 5x - 15, \quad x_0 = \frac{1}{6}$.
2. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \sin x - 3x + 2$ в точке $x_0 = 0$.
3. Прямая $y = 8x + 11$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 5x + 7$. Найдите абсциссу точки касания.
4. Прямолинейное движение точки описывается законом $x(t) = \frac{1}{5}t^5 + \frac{1}{2}t^2$. Найдите её скорость и ускорение в момент времени $t = 3$. (Время измеряется в секундах, перемещение – в метрах).
5. Тело массой 10 кг движется прямолинейно по закону $s = 3t^2 + t + 4$. Найти кинетическую энергию тела ($mv^2/2$) через 4с после начала движения.
6. Найдите силу, действующую на тело массой 4 кг, движущееся по закону $s(t) = 3t^3 - 2t - 3$ в момент времени $t = 2$ с.

Вариант 2,7,12,17

1. Найти угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = e^x - 2x^2$ в его точке с абсциссой $x_0 = 0$.
2. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 4x - \sin x + 1$ в точке $x_0 = 0$.
3. Прямая $y = 8x + 11$ параллельна касательной к графику функции $y = x^2 + 7x - 7$. Найдите абсциссу точки касания.

4. Прямолинейное движение точки описывается законом $x(t)=t^3+\frac{1}{2}t^4$. Найдите её скорость и ускорение в момент времени $t = 2$. (Время измеряется в секундах, перемещение – в метрах).

5. Тело массой 100 кг движется прямолинейно по закону $s=5t^2-2$. Найдите кинетическую энергию ($mv^2/2$) тела через 2с после начала движения.

6. Тело массой 2 кг движется по закону $s(t)=3t^3-5t-3$. Найдите действующую на него силу в момент времени $t=3c$.

Вариант 3,8,13,18

1. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к график функции $y=x-4\sqrt{x}$ в точке $x_0 = 1$.

2. Составить уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 + 4x + 5$ в точке с абсциссой $x = -3$.

3. Прямая $y=-3x-6$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+5x-4$. Найдите абсциссу точки касания

4. Прямолинейное движение точки описывается законом $x(t)=t^5+t^3$. Найдите её скорость и ускорение в момент времени $t = 2$. (Время измеряется в секундах, перемещение – в метрах).

5. Тело массой 10 кг движется по закону $s=\frac{t^3}{3}-6t$ (s в метрах, t в секундах). Найти кинетическую энергию тела ($mv^2/2$) через 3с после начала движения.

6. Найдите силу, действующую на тело массой 5 кг, движущееся по закону $s(t)=\frac{1}{3}t^3-2t+1$ в момент времени $t=3$с.

Вариант 4,9,14,19

1. К графику функции $f(x)=x^3-3x^2$ проведена касательная через точку с абсциссой $x_0 = -1$. Вычислите тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс.

2. К графику функции $f(x) = x + 3x^2$ в её точке с абсциссой $x = -1$ проведены касательная. Составьте ее уравнение.

3. Прямая $y=8x-5$ параллельна касательной к графику функции $y=x^2+7x=7$. Найдите абсциссу точки касания.

4. Материальная точка движется по следующему закону, выражающему зависимость пути от времени: $s(t)=-2t^2+4t-2$. Какова будет скорость и ускорение этой точки в момент времени $t_0=1$.

5. Тело массой 2 кг движется по закону $s=t^3+2t^2-4t-5$ (s в метрах, t в секундах). Найти кинетическую энергию тела ($mv^2/2$) через 2с после начала движения.

6. Найдите силу, действующую на тело массой 2 кг, движущееся по закону $s(t) = \frac{1}{2}t^3 - t + 3$ в момент времени $t = 4$с.

Вариант 5,10,15,20

1. К графику функции $f(x) = -x^3 + x - 1$проведена касательная через точку с абсциссой $x_0 = -2$. Вычислите тангенс угла наклона этой касательной к оси абсцисс.

2. Записать уравнение касательной к графику функции $f(x) = 3x - x^2 - 2$ в точке $x_0 = -1$.

3. Прямая $y = 3x + 6$ параллельна касательной к графику функции

$y = x^2 - 5x + 7$. Найдите абсциссу точки касания.

4. Прямолинейное движение точки описывается законом $x(t) = t^4 - 2t^2$. Найдите её скорость и ускорение в момент времени $t = 3$. (Время измеряется в секундах, перемещение – в метрах).

5. Тело массой 5 кг движется по закону $s = \frac{t^3}{3} + t^2 - 5t + 2$ (s в метрах, t в секундах). Найти кинетическую энергию тела ($mv^2/2$) через 2с после начала движения.

6. Тело массой 3 кг движется по закону $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - 4t + 7$. Найдите действующую на него силу в момент времени $t = 2$с.

Методические указания:

Геометрический смысл производной

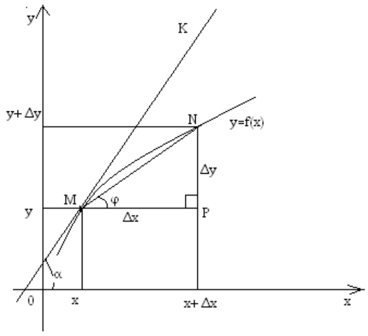


Рис.12. Геометрический смысл производной

Угол α - угол наклона касательной к оси абсцисс. $tg\alpha = f'(x_0)$

Получим $k = tg\alpha = y' = f'(x_0)$.

Производная $f'(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту – касательной к графику функции в $y = f(x)$ точке, абсцисса которой равна x_0. В этом заключается <u>геометрический смысл</u> производной. Отсюда получаем уравнение касательной в точке x_0 :$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Алгоритм написания уравнения касательной к графику функции

1. Записать уравнение касательной в общем виде.

2. Вычислить значение функции в заданной точке. Для этого подставьте в функцию вместо *x* значение данной точки.

3. Найдите производную функции.

4. Вычислить значение производной функции в заданной точке. Для этого подставьте в производную функции вместо *x* значение данной точки.

5. Все полученные результаты подставьте в общее уравнение касательной.

Механический смысл производной

Пусть материальная точка движется неравномерно по некоторой прямой. Каждому значению времени *t* соответствует расстояние *S* до некоторой фиксированной точки. Расстояние зависит от *t*. *S=S(t)*. Это равенство называют законом движения точки.

Требуется найти скорость движения точки $\upsilon_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}$ - средняя скорость движения точки за время *t*.

Предел средней скорости движения при стремлении к нулю промежутка времени Δt называется скоростью движения точки в данный момент времени (или мгновенной скоростью).

$\upsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$ *или* $\upsilon = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S(t+\Delta t) - S(t)}{\Delta t}$ - это производная S по времени, т.е. $\boxed{\upsilon = S'(t).}$

В этом заключается механический смысл производной. Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо процесс, то y' - скорость протекания данного процесса, или если $y = f(x)$ – какая-либо функция, то y' – это скорость изменения функции.

Пример: Написать уравнение касательной к графику функции $f(x) = \cos x$ в точке с абсциссой $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Решение: 1. $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

2. $f(\frac{\pi}{6}) = \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

3. $f(x)' = (\cos x)' = -\sin x$;

4. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$;

5. $y = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3} - \left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{2}$

Ответ: $y = \frac{\sqrt{3} - \left(x - \frac{\pi}{6}\right)}{2}$.

Форма контроля: отчет

Практическая работа №8

Применение производной к исследованию функции

Цель работы: Углубление полученных знаний и формирование умений применять формулы производной к вычислению промежутков монотонности и точек экстремума.

Количество часов на выполнение: 2 часа

Задание:

1. Найти точки максимума функции.
2. Найти точки минимума функции.
3. Найти промежутки монотонности.
4. Найти наименьшее значение функции на отрезке.
5. Найти наибольшее значение функции на отрезке.

Задания по вариантам:

Вариант 1,6,11,16

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-17)e^{x-16}$ на отрезке $[15;17]$.
2. Найдите наибольшее значение функции $y = 20\cos x + 10\sqrt{3}\cdot x - \frac{10\sqrt{3}\cdot\pi}{3} + 7$ на отрезке $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Вариант 2,7,12,17

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-17)e^{x-16}$ на отрезке $[15;17]$.
2. Найдите наибольшее значение функции $y = 4\sqrt{2}\cos x + 4x - \pi + 4$ на отрезке $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Вариант 3,8,13,18

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-13)e^{x-12}$ на отрезке $[11;13]$.
2. Найдите наибольшее значение функции $y = 2\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + 12$ на отрезке $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Вариант 4,9,14,19

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-10)e^{x-9}$ на отрезке $[8;10]$.
2. Найдите наибольшее значение функции $y = 5\sqrt{2}\cos x + 5x - \frac{5\pi}{4} + 11$ на отрезке $[0;\frac{\pi}{2}]$.

Вариант 5,10,15,20

1. Найдите наименьшее значение функции $y = (x-14)e^{x-13}$ на отрезке $[12;14]$.

2. Найдите наибольшее значение функции $y = 7\sqrt{2}\cos x + 7x - \frac{7\pi}{4} + 9$ на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$.

Задания по вариантам:

Вариант 1,6,11,16

1. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+2) - 2x + 12$.
2. Найдите точку минимума функции $y = (3-x)e^{3-x}$.
3. Найдите промежутки монотонности $y = (x-17)e^{x-16}$.
4. Найдите промежутки убывания функции $y = 2\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + 12$.

Вариант 2,7,12,17

1. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+9) - 10x + 6$.
2. Найдите точку минимума функции $y = (25-x)e^{25-x}$.
3. Найдите промежутки монотонности $y = \ln(x+5) - 4x + 9$.
4. Найдите промежутки возрастания функции $y = 5\sqrt{2}\cos x + 5x - \frac{5\pi}{4} + 11$.

Вариант 3,8,13,18

1. Найдите точку максимума функции $y = \ln(x+11) - 5x + 2$.
2. Найдите точку минимума функции $y = (16-x)e^{16-x}$.
3. Найдите промежутки монотонности $y = (x-13)e^{x-12}$.
4. Найдите промежутки возрастания функции $y = 2\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{6} + 12$.

Методические указания:

Определение. Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

Алгоритм нахождения критических точек функции:

1) Найти область определения функции.

2) Найти производную функции.

3) Приравнять производную к нулю и найти критические точки функции.

4) Отметить критические точки на области определения.

5) Вычислить знак производной в каждом из полученных интервалов.

6) Выяснить поведение функции в каждом интервале.

7) Учитывая поведение функции, определить точки максимума и точки минимума.

Точки экстремума.

Определение. Функция f(x) имеет в точке x_1 максимум, если ее значение в этой точке больше значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1. Функция, определенная на отрезке может иметь максимум и минимум только в точках, находящихся внутри этого отрезка. Не путать максимум и минимум функции с ее наибольшим и наименьшим значением на отрезке – это понятия принципиально различные.

Определение. Точки максимума и минимума функции называются точками экстремума.

Теорема. Если функция f(x) дифференцируема в точке $x = x_1$ и точка x_1 является точкой экстремума, то производная функции обращается в нуль в этой точке.

Теорема. Пусть функция f(x) непрерывна в интервале (a, b), который содержит критическую точку x_1, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_1).

Если при переходе через точку x_1 слева направо производная функции f′(x) меняет знак с «+» на «-», то в точке $x = x_1$ функция f(x) имеет максимум, а если производная меняет знак с «-» на «+» - то функция имеет минимум.

1. Найдите точку максимума функции $y = (x-3)^2 e^{x-6}$.

<u>Решение:</u> $y' = 2(x-3) \cdot e^{x-6} + e^{x-6} \cdot (x-3)^2 = e^{x-6} \cdot (x-3)(x-1)$.

$y' = 0$ *при* $x = 1$ *и* $x = 3$.

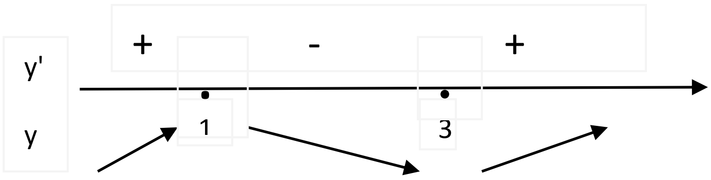


Рис.13. Точки экстремума

Видно, что у функции единственный максимум, это точка $x = 1$ (в ней происходит смена знаков с «+» на «-»).

x = 1 – точка максимума.

Ответ: 1.

2. Найдите точки экстремума функции и определите их характер

$y = x^4 - 8x^2$

Область определения D(f)=R,

$y' = (x^4 - 8x^2)' = 4x^3 - 16x$

$y' = 0$

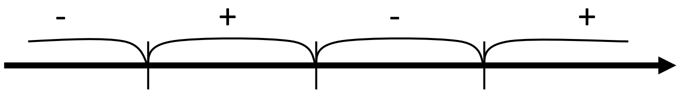
$4x^3 - 16x = 0$

$4x \cdot (x^2 - 4) = 0$

$4x \cdot (x-2)(x+2) = 0$

$x = 0$ или $x = 2$ или $x = -2$

$x = 0$, $x = 2$, $x = -2$ - это стационарные точки



↘ -2 ↗ 0 ↘ 2 ↗ x

Функция убывает на (-∞; -2], на [0; 2].

Функция возрастает на [-2; 0], на [2; +∞).

x=-2, x=2 – это точки минимума.

x=0 – это точка максимума.

Ответ: x=-2, x=2 – это точки минимума, x=0 – это точка максимума.

3. Найдите точки экстремума функции и определите их характер

$$y=\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1$$

Область определения D(f)=R,

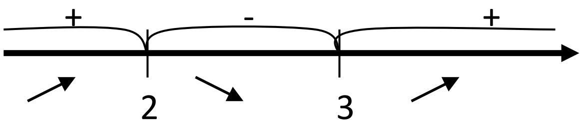
$$y'=(\frac{x^3}{3}-\frac{5}{2}x^2+6x-1)'=x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$$

$$y'=0$$

$$x^2-5x+6=0$$

$$x_1=3;\,x=2$$

x=3, x=2 – это стационарные точки.



Функция возрастает на (-∞; 2], на [3; +∞).

Функция убывает на [2; 3].

x=2 – это точка максимума, x=3 – это точка минимума.

Ответ: x=2 – это точка максимума, x=3 – это точка минимума.

4. Найдите точки экстремума функции и определите их характер.

$$y=2x^5+5x^4-10x^3+3$$

Область определения D(f)=R

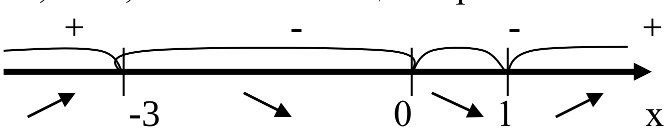
$$y'=(2x^5+5x^4-10x^3+3)'=x10x^4+20x^3-30x^2=10x^2(x-1)(x+3)$$

$$y'=0$$

$$10x^4+20x^3-30x^2=0$$

$$x_1=0;\,x_2=1\;x_3=-3$$

x=0, x=1, x=-3 – это стационарные точки.



Функция возрастает на (-∞; -3], на [1; +∞).

Функция убывает на [-3; 1].

x=-3 – это точка максимума.

x=1 – это точка минимума.

Ответ: x=-3 – это точка максимума, x=1 – это точка минимума.

Форма контроля: отчет

Практическая работа №9

Вычисление первообразной и неопределенного интеграла с применением математического программного обеспечения MathCad.

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: формирование умений вычислять первообразную и неопределенный интеграл с помощью таблиц интегрирования.

Задание:

1. Найдите все первообразные *F(x)* для функции 1-3. В четвертом задании найдите для заданной функции *f(x)* ту первообразную, график которой проходит через точку *M*.
2. В 5-7 задании вычислить неопределенный интеграл.

Задания по вариантам:

<table>
<tr>
<td>Вариант 1, 11
1. $f(x)=1+2x^4-\frac{1}{x^3}$ $на$ $(0;+\infty)$
2. $f(x)=\cos 3x+1$ $на$ $(-\infty;+\infty)$
3. $f(x)=(1-4x)^5$ $на$ $(-\infty;+\infty)$
4. $f(x)=\frac{3}{\sin^2 2x}$, $M\left(\frac{\pi}{8};2\right)$
5. $\int\left(7-8x+4x^3-6x^5\right)dx$
6. $\int\frac{4x^3-6x+2}{3x}dx$
7. $\int\frac{4x^2\cdot\sqrt{x}}{3\cdot\sqrt[3]{x}}dx$</td>
<td>Вариант 2, 12
1. $f(x)=3-2x^3+\frac{1}{x^2}$ $на$ $(0;+\infty)$
2. $f(x)=\sin 2x-1$ $на$ $(-\infty;+\infty)$
3. $f(x)=(2-5x)^6$ $на$ $(-\infty;+\infty)$
4. $f(x)=\frac{2}{\cos^2 x}$, $M\left(\frac{\pi}{4};3\right)$
5. $\int\left(9x^6-2x^3+5x-1\right)dx$
6. $\int\frac{7-x+4x^2}{5x^2}dx$
7. $\int\frac{5\cdot\sqrt[3]{x}}{2x\cdot\sqrt{x}}dx$</td>
</tr>
<tr>
<td>Вариант 3,13
1. $f(x)=2+\frac{3}{x^2}-3x^4$ $на$ $(0;+\infty)$
2. $f(x)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ $на$ $(-\infty;+\infty)$
3. $f(x)=\sqrt{3x+2}$ $на$ $\left(-\frac{2}{3};+\infty\right)$
4. $f(x)=\frac{3}{\cos^2 3x}$, $M\left(\frac{\pi}{12};3\right)$
5. $\int\left(4x^4+3x^2-2x+5\right)dx$</td>
<td>Вариант 4, 14
1. $f(x)=4-5x^2+\frac{4}{x^3}$ $на$ $(0;+\infty)$
2. $f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ $на$ $(-\infty;+\infty)$
3. $f(x)=(1-5x)^{-4}$ $на$ $\left(\frac{\sqrt{5}}{5};+\infty\right)$
4. $f(x)=\frac{2}{\sin^2 3x}$, $M\left(\frac{\pi}{6};1\right)$
5. $\int\left(6-x-2x^2+5x^4\right)dx$</td>
</tr>
</table>

6. $\int \frac{3-5x+6x^3}{2x^2}dx$ 7. $\int \frac{7x^2\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$	6. $\int \frac{4x^4-3x^2+7}{5x}dx$ 7. $\int \frac{9\cdot\sqrt{x}}{5x^3\cdot\sqrt{x}}dx$
Вариант 5, 15 1. $f(x)=2-2x^3+\frac{3}{x^4}+x$ *на* $(0;+\infty)$ 2. $f(x)=5\sin x+2$ *на* $(-\infty;+\infty)$ 3. $f(x)=(5-9x)^8$ *на* $(-\infty;+\infty)$ 4. $f(x)=2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right),\quad M\left(\frac{\pi}{3};2\right)$ 5. $\int\left(8x^4-3x^2+7x-3\right)dx$ 6. $\int \frac{3-x+2x^4}{5x}dx$ 7. $\int \frac{4x^2\cdot\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx$	Вариант 6, 16 1. $f(x)=1+2x^2-\frac{5}{x^3}+x$ *на* $(0;+\infty)$ 2. $f(x)=2\sin x-1$ *на* $(-\infty;+\infty)$ 3. $f(x)=(4+8x)^9$ *на* $(-\infty;+\infty)$ 4. $f(x)=3\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right),\quad M\left(\frac{\pi}{6};4\right)$ 5. $\int\left(1-5x+6x^5-7x^6\right)dx$ 6. $\int \frac{7x^2-3x-1}{2x^2}dx$ 7. $\int \frac{x\cdot\sqrt{x}}{7\cdot\sqrt[3]{x}}dx$
Вариант 7,17 1. $f(x)=3+\frac{3}{x^3}+4x^2-5$ *на* $(0;+\infty)$ 2. $f(x)=2\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$ *на* $(-\infty;+\infty)$ 3. $f(x)=(3-4x)^7$ *на* $(-\infty;+\infty)$ 4. $f(x)=4\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right),\quad M\left(\frac{\pi}{8};4\right)$ 5. $\int\left(3+x-3x^3+4x^5\right)dx$ 6. $\int \frac{4x^5-3x^3+2x^2}{3x^3}dx$ 7. $\int \frac{2x^3\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$	Вариант 8,18 1. $f(x)=2-\frac{4}{x^2}+3x^3+4$ *на* $(0;+\infty)$ 2. $f(x)=2\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ *на* $(-\infty;+\infty)$ 3. $f(x)=(2-5x)^7$ *на* $(-\infty;+\infty)$ 4. $f(x)=3\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right),\quad M\left(\frac{\pi}{8};3\right)$ 5. $\int\left(2x^6-3x^4+5x-2\right)dx$ 6. $\int \frac{7-2x^2+3x^4}{5x^3}dx$ 7. $\int \frac{5x\cdot\sqrt[3]{x^2}}{2\sqrt{x}}dx$
Вариант 9,19	Вариант 10,20

1. $f(x)=\dfrac{2}{x^4}+3x^3-5x+1$ *на* $(0;+\infty)$ 2. $f(x)=2\sin 4x+3$ *на* $(-\infty;+\infty)$ 3. $f(x)=(2-6x)^7$ *на* $(-\infty;+\infty)$ 4. $f(x)=3\cdot\dfrac{1}{\cos^2 3x}$, $M\left(\dfrac{\pi}{3};1\right)$ 5. $\int\left(6-x-2x^2+5x^4\right)dx$ 6. $\int\dfrac{3-x+2x^4}{5x}dx$ 7. $\int\dfrac{5\cdot\sqrt[3]{x}}{2x\cdot\sqrt{x}}dx$	1. $f(x)=\dfrac{5}{x^5}-3x^3+5x-1$ *на* $(0;+\infty)$ 2. $f(x)=3\cos 4x-2$ *на* $(-\infty;+\infty)$ 3. $f(x)=(1-5x)^6$ *на* $(-\infty;+\infty)$ 4. $f(x)=2\cdot\dfrac{1}{\sin^2 3x}$, $M\left(\dfrac{\pi}{6};5\right)$ 5. $\int\left(7-8x+4x^3-6x^5\right)dx$ 6. $\int\dfrac{4x^4-3x^2+7}{5x}dx$ 7. $\int\dfrac{7x^2\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$

Методические указания:

Определение. Если функция F(x) – первообразная для функции f(x), то множество функций F(x) +C , где C – произвольная постоянная, называется неопределенным интегралом от функции f(x) и обозначается

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

Имеют место свойства:

1. $\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$;

2. Если C=Const, то $\int Cf(x)dx=C\int f(x)dx$;

3. $\int f(kx+b)dx=\dfrac{1}{k}F(kx+b)+C$.

Формулы интегрирования:

1. $\int 0\cdot dx=C$	8. $\int\cos x\,dx=\sin x+C$
2. $\int dx=x+C$	9. $\int\dfrac{1}{\cos^2 x}dx=tgx+C$
3. $\int x^n dx=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$	10. $\int\dfrac{1}{\sin^2 x}dx=-ctgx+C$
4. $\int\dfrac{1}{x}dx=\ln\|x\|+C$	11. $\int\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx=\arcsin x+C$

5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	12. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$
6. $\int e^x dx = e^x + C$	13. $\int \frac{1}{x^2+1} dx = arctgx + C$
7. $\int \sin x\, dx = -\cos x + C$	14. $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

Пример:

Найти первообразную для функции $y = 3x^2 - 2$, проходящую через точку $M(2;4)$.

Решение. Множество всех первообразных функции $y = 3x^2 - 2$ есть неопределенный интеграл $\int (3x^2 - 2)dx$. Вычислим его, используя свойства интеграла 1° и 2°. Имеем: $\int (3x^2 - 2)dx = \int 3x^2 dx - \int 2 \cdot dx = 3\int x^2 dx - 2\int 1 \cdot dx = 3 \cdot \frac{x^3}{3} - 2x + C = x^3 - 2x + C$.

Получили, что множество всех первообразных задается семейством функций $y=F(x)+C$, то есть $y=x^3-2x+C$, где C – произвольная постоянная.

Зная, что первообразная проходит через точку $M(2;4)$, подставим ее координаты в предыдущее выражение и найдем C.

$$4=2^3-2\cdot 2+C \Leftrightarrow C=4-8+4; \quad C=0.$$

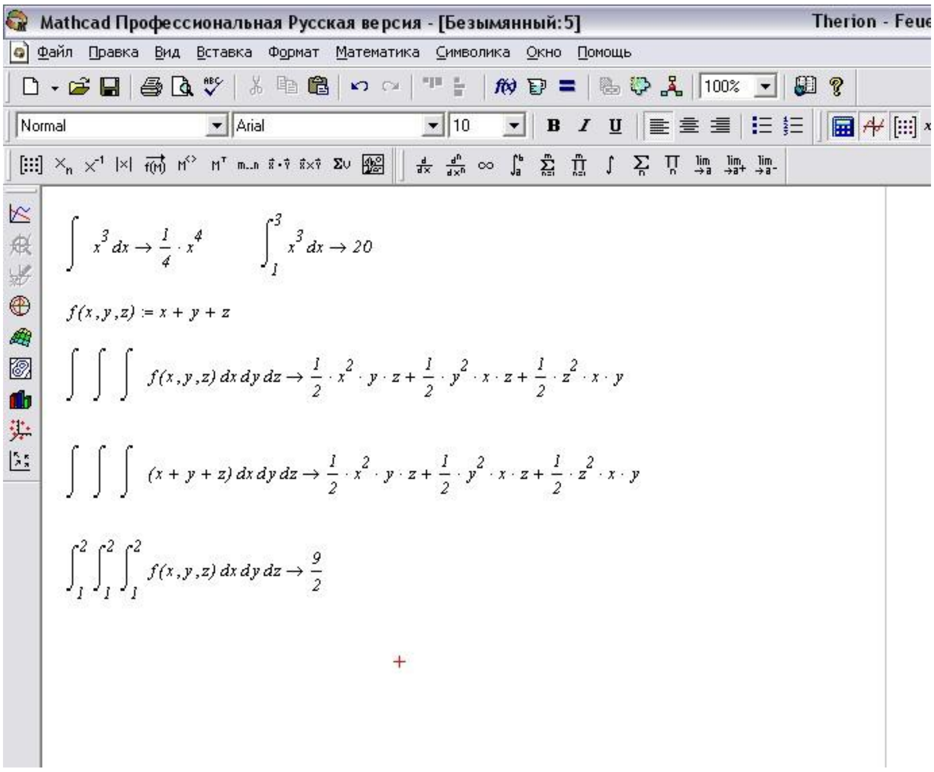
Ответ: $F(x)=x^3-2x$.

Алгоритм вычисления определенного интеграла в программе Mathcad:

В MathCAD существует возможность вычисления как неопределенных, так и определенных интегралов. После нажатия пиктограммы на панели «Исчисление» появится знак интеграла с незаполненными верхним и нижним пределами (или без них), это зависит от того, какой вид интеграла необходимо вычислить – определенный или нет), подынтегральным выражением и переменной интегрирования.

Так же как и в производных не имеет значения, была ли определена подынтегральная функция до интеграла или непосредственно в интеграле. Не следует забывать об использовании знака символьных вычислений.

При вычислении двойных (тройных и т.д.) интегралов следует навести курсор на нужное место документа и нажимать на пиктограмму интеграла, не меняя при этом положение курсора.



Форма контроля: отчет

Практическая работа №10

Вычисление определенного интеграла

Количество часов на выполнение: 2 часа, из них на практическую подготовку – 2 часа.

Цель работы: формирование умений вычислять определенные интегралы с помощью формулы Ньютона-Лейбница

Задание:

1. Вычислить определенные интегралы.

1. $\int_0^2 x^3 dx$ 2. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ 3. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$ 4. $\int_0^1 \sqrt{x} dx$ 5. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin x dx$ 6. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$	1. $\int_0^3 x^4 dx$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{cos^2 x}$ 3. $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$ 4. $\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ 5. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos x dx$ 6. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3dx}{\sin^2 x}$
Вариант 7,9,11 1. $\int_0^{3\frac{1}{3}} x^2 dx$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx$ 3. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2dx}{\cos^2 x}$	Вариант 8,10,12 1. $\int_0^2 x^3 dx$ 2. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$ 3. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{5dx}{\sin^2 x}$

4. $\int_0^1 (2x+1)dx$	4. $\int_0^2 (x^3-1)dx$
5. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)dx$	5. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x - \sin^2 x)dx$
6. $\int_0^{\frac{\pi}{4}} (1+tg^2 x)dx$	6. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} (1+ctg^2 x)dx$

2.Вычислить определенные интегралы с помощью программы Mathcad.

Методические указания

Определение. Приращение F(b) – F(a) любой из первообразных функций F(x) + C при изменении аргумента от x = a до x = b называется определённым интегралом, и обозначается: $\int_a^b f(x)dx$.

Таким образом $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, где a - нижний предел интеграла, b – верхний предел интеграла.

Равенство $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ называется формулой Ньютона–Лейбница.

Для вычисления определённого интеграла $\int_a^b f(x)dx$ нужно найти соответствующий неопределённый интеграл, в полученное его выражение подставить вместо *x* сначала верхний, а затем нижний пределы определённого интеграла и из первого результата подстановки вычесть второй.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Свойства определённого интеграла

1. $\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$, где C - константа

2. $\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

1. Вычислить $\int_0^5 x^2 dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^5 = \frac{5^3}{3} - \frac{0}{3} = \frac{125}{3} = 41\frac{2}{3}.$

2. Вычислить $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x+3)^3}$.

Означим $4x+3=z$, откуда $4xdx = dz$ или $dx = \frac{dz}{4}$; при $x=1, t_н = -4+3=-1, t_в = 4+3=7$.

Следовательно, $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{(4x+3)^3} = \int_{-1}^{7} \frac{dz}{4z^3} = \frac{1}{4}\int_{-1}^{7} z^{-3}dz = \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2\cdot 7^2} + \frac{1}{2\cdot 1}\right) = \frac{13}{112}$.

1.Вычислить $\int_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$.

2.Вычислить $\int_0^1 \frac{4dx}{1+x^2} = 4arctgx\Big| = 4(arctg1 - arctg0) = 4(\frac{\pi}{4} - 0) = \pi..$

3.Вычислить $\int_0^1 \frac{2dx}{x+2} = 2\ln(x+2) = 2(\ln(1+2) - \ln(0+2)) = 2(\ln 3 - \ln 2) = 0{,}811$

4.Вычислить $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6xdx}{(x^2-1)^3}$

Пусть $x^2 - 1 = t;$ тогда $d(x^2-1) = dt$, $2xdx = dt$, откуда $dx = \frac{dt}{2x}$.

Найдем новые пределы интегрирования по переменной t:

нижний предел $t_н = x_н^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1;$ верхний предел $t_в = x_в - 1 = \frac{1}{2}^2 - 1 = -\frac{3}{4}$.

Таким образом,

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{6xdx}{(x^2-1)^3} = \int_{-1}^{-\frac{3}{4}} \frac{6x\cdot\frac{dx}{2x}}{t^3} = \int_{-1}^{-\frac{3}{4}} \frac{3dt}{t^3} = -3\frac{1}{t^2} = -3(\frac{1}{(-3/4)^2} - \frac{1}{(-1)^2}) = -2\frac{1}{3}.$$

3.Вычислить $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos xdx}{\sin^3 x}$

Пусть $\sin x = t$, тогда $\cos xdx = dt$.

Найдем новые пределы интегрирования:

нижний предел $t_н = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; верхний предел $t_в = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

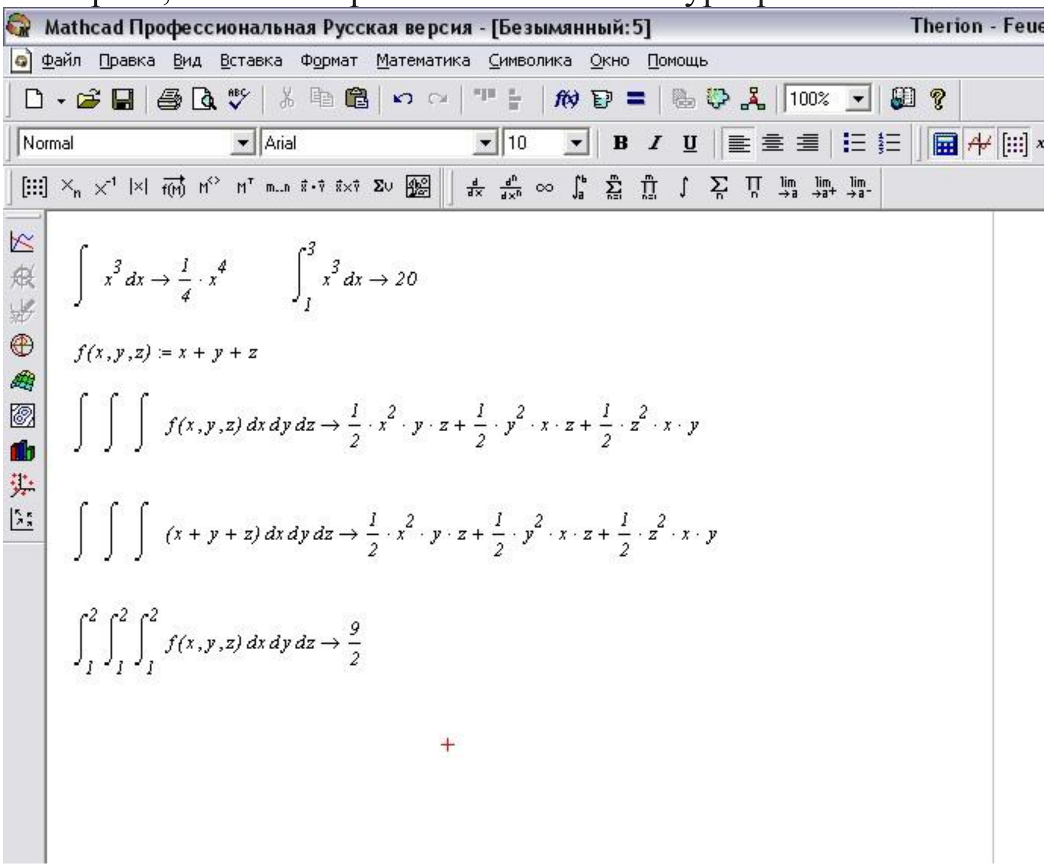
Значит, $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x dx}{\sin^3 x} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dt}{t^3} = \int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} t^{-3} dt = -\frac{1}{2t^2} = \frac{1}{2}(4-\frac{4}{3}) = \frac{4}{3}$.

Алгоритм вычисления определенного интеграла в программе Mathcad:

В MathCAD существует возможность вычисления как неопределенных, так и определенных интегралов. После нажатия пиктограммы на панели «Исчисление» появится знак интеграла с незаполненными верхним и нижним пределами (или без них), это зависит от того, какой вид интеграла необходимо вычислить – определенный или нет), подынтегральным выражением и переменной интегрирования.

Так же как и в производных не имеет значения, была ли определена подынтегральная функция до интеграла или непосредственно в интеграле. Не следует забывать об использовании знака символьных вычислений.

При вычислении двойных (тройных и т.д.) интегралов следует навести курсор на нужное место документа и нажимать на пиктограмму интеграла, не меняя при этом положение курсора.



Форма контроля: отчет

Практическая работа №11

Построение сечений геометрических фигур

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: Формирование умений строить сечения геометрических фигур.

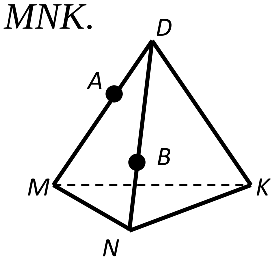
Задание:

1. Построить сечения тетраэдра в 1-3 задании.
2. Построить сечения параллелепипеда в 4 и 5 задании.

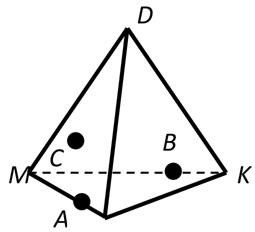
Задания по вариантам.

Вариант 1,5,9,13,17

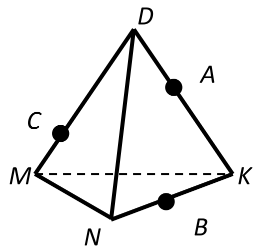
1. Постройте точку пересечения прямой AB с плоскостью MNK.



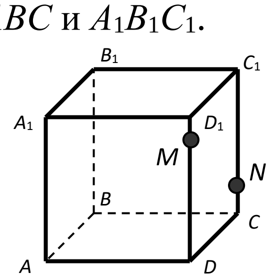
2. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки A, B и C; $C \in (MND)$.



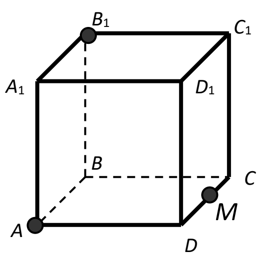
3. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки A, B и C.

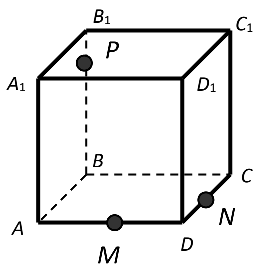


4.Постройте точки пересечения прямой MN с плоскостями ABC и $A_1B_1C_1$.



5. Постройте сечения, проходящие через указанные точки.





Методические указания:

Секущей плоскостью многогранника назовем любую плоскость, по обе стороны от которой имеются точки данного многогранника.

Секущая плоскость пересекает грани многогранника по отрезкам. Многоугольник, сторонами которого являются эти отрезки, называется сечением многогранника.

Алгоритм построения сечения многогранника плоскостью.

1. Построить точки пересечения секущей плоскости с рёбрами многогранника (тетраэдра, параллелепипеда).
2. Полученные точки, лежащие в одной грани, соединить отрезками.
3. Многоугольник, ограниченный данными отрезками, и есть построенное сечение.

Замечание: Если секущая плоскость пересекает противоположные грани параллелепипеда по каким-либо отрезкам, то эти отрезки параллельны.

Пример:

Рассмотрим прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Построим сечение, проходящее через точки M, N, L.

Решение:

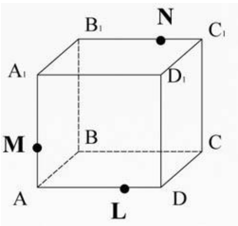


Рис.36. Прямоугольный параллелепипед

1. Соединим точки M и L, лежащие в плоскости AA_1D_1D.
2. Пересечем прямую ML (принадлежащую сечению) с ребром A_1D_1, они лежат в одной плоскости AA_1D_1D. Получим точку X_1.
3. Точка X_1 лежит на ребре A_1D_1, а значит и в плоскости $A_1B_1C_1D_1$, соединим ее сточкой N, лежащей в этой же плоскости.
4. $X_1 N$ пересекается с ребром A_1B_1 в точке K.
5. Соединим точки K и M, лежащие в одной плоскости AA_1B_1B.
6. Найдем прямую пересечения плоскости сечения с плоскостью DD_1C_1C:пересечем прямую ML (принадлежащую сечению) с ребром DD_1, они лежат в одной плоскости AA_1D_1D, получим точку X_2.
7. Пересечем прямую KN (принадлежащую сечению) с ребром D_1C_1, они лежат в одной плоскости $A_1B_1C_1D_1$, получим точку X_3;
8. Точки X_2 и X_3лежат в плоскости DD_1C_1C. Проведем прямуюX_2 X_3 , которая пересечет ребро C_1C в точке T, а ребро DC в точке P. И соединим точки L и P, лежащие в плоскости $ABCD$.
9. $MKNTPL$ - искомое сечение.

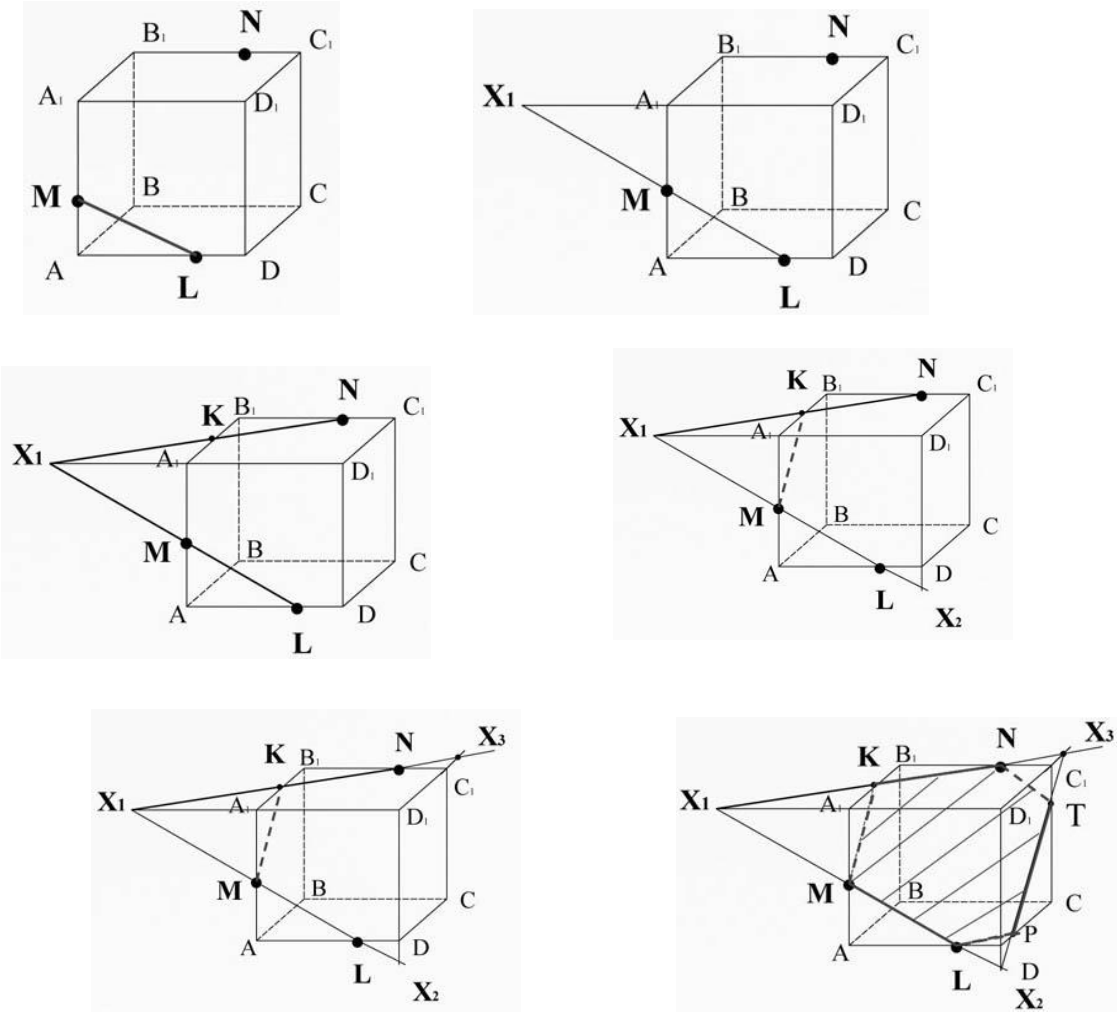


Рис.37. Построение сечения прямоугольного параллелепипеда

Форма контроля: отчет

Практическая работа №12

Расчеты в сечениях на выносных чертежах

Количество часов на выполнение: 2 часа

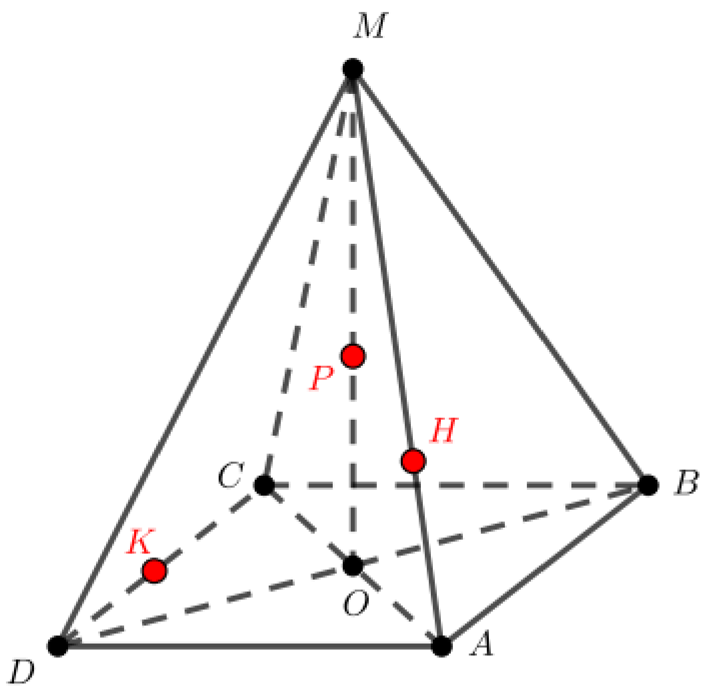
Цель работы: Закрепление знания о правилах выполнения и обозначения сечений на чертежах.

Задание:

1) Для наклонного сечения цилиндра сечением будет эллипс. Рассчитайте длину его большой и малой осей. Малая ось равна диаметру цилиндра, а большая = D / cos(α), где α – угол между осью цилиндра и секущей плоскостью.

2) Дан куб ABCDA1B1C1D1диагонали основания пересекаются в точке. Найдите сечение куба плоскостью проходящей через точ ку перпендикулярно прямой.

3) Постройте сечение правильной четырехугольной пирамиды, проходящее через точки H, K, PM



Методические указания:

Сечения в зависимости от расположения их на чертеже делятся на вынесенные и наложенные. Вынесенные сечения располагают на свободном месте поля чертежа (рис.38, а) или в разрыве изображения предмета (рис. 38, в). Наложенные сечения располагают на соответствующем изображении предмета (рис. 38, б).

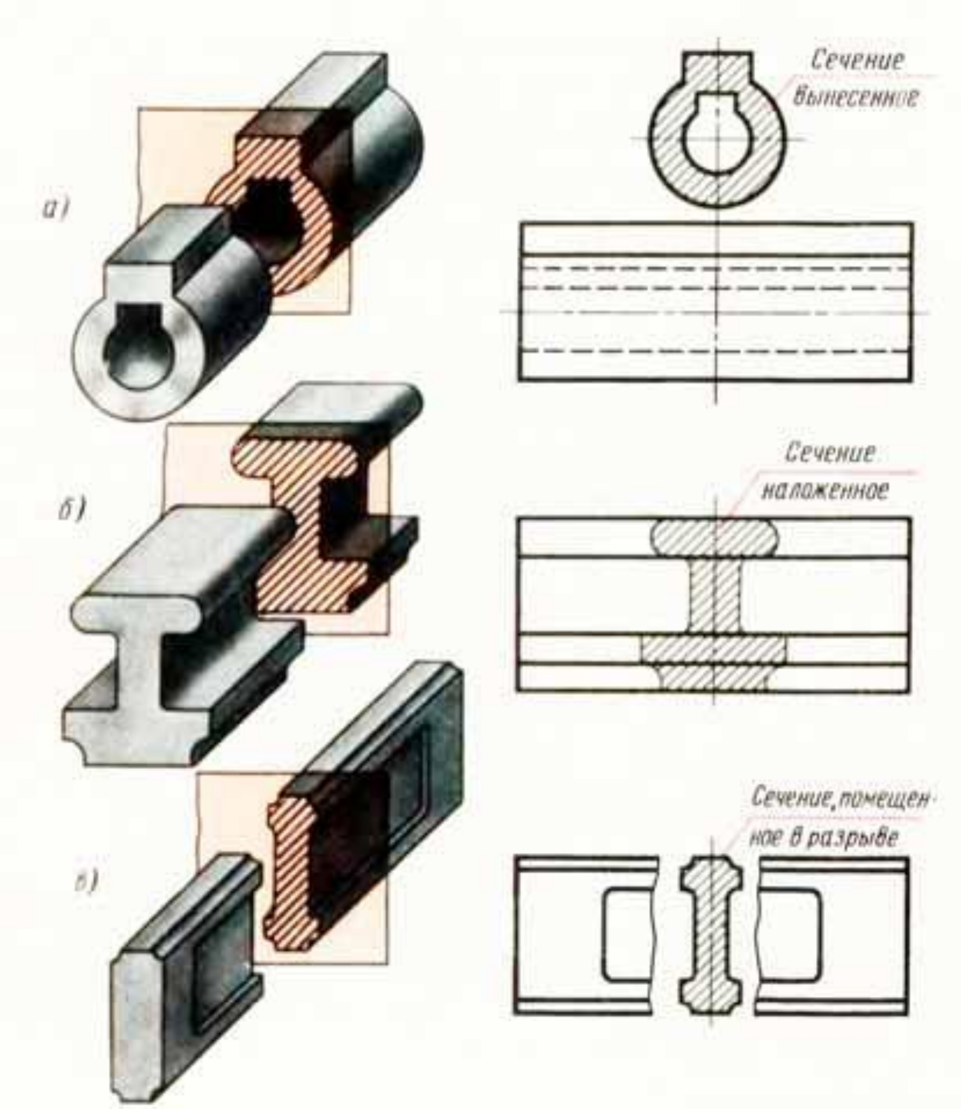


Рис.38. Вынесение сечения

Выносным элементом называют дополнительное отдельное изображение в увеличенном виде какой-либо части изделия, требующей графического и других пояснений в отношении формы, размеров и иных данных.
При применении выносного элемента соответствующее место изображения отмечают замкнутой сплошной тонкой линией (окружностью или овалом) с обозначением римской цифрой порядкового номера выносного элемента на полке линии-выноски (рис.39).

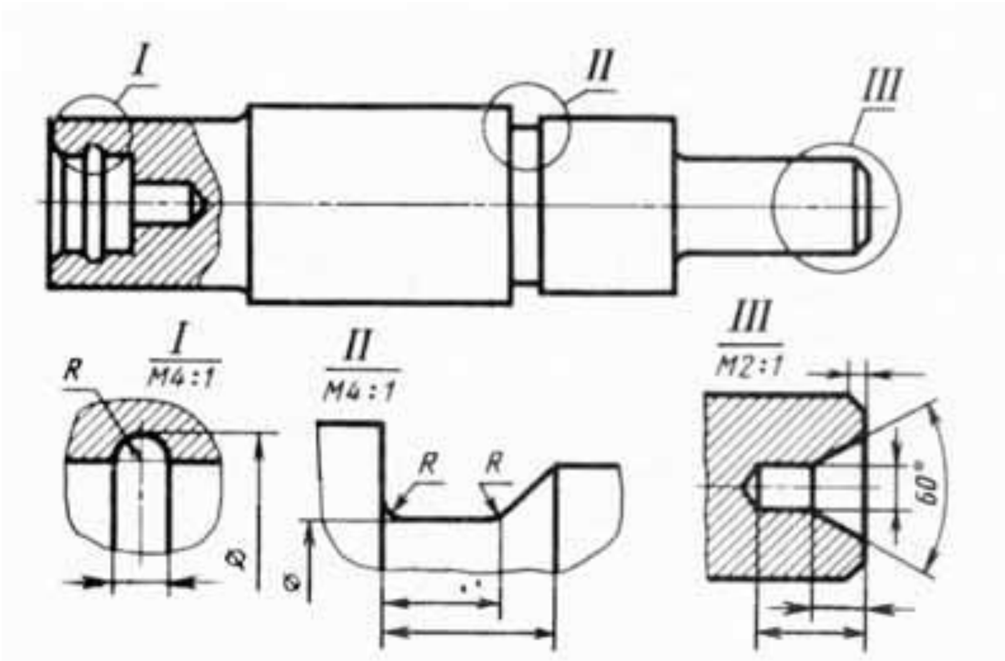


Рис.39. Вынесные элементы

Над выносным элементом указывается та же цифра и масштаб, в котором выполнен выносной элемент (масштабы могут быть различные). Выносной элемент следует располагать возможно ближе к соответствующему месту на изображении предмета.

Выносной элемент может содержать подробности, не указанные на соответствующем изображении, и может отличаться от него по содержанию. Например, изображение может быть видом, а выносной элемент — разрезом.

Форма контроля: отчет

Практическая работа №13

Изготовление многогранника

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: углубление знания по теме для развития пространственных представлений у студентов

Задание:

1.Изготовить любой правильный многогранник.

2. Проверить для полученного многогранника теорему Эйлера.

3. Описать основные свойства многогранника

Методические указания:

Изготовим модели правильных многогранников, склеив развертки.
Это тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Простейшим среди многогранников является тетраэдр (четырёхгранник – от греческого «тетра», т.е. четыре). Его четыре грани – равносторонние треугольники. Четыре – это наименьшее число граней, отделяющих часть трёхмерного пространства. Тем не менее, тетраэдр обладает многими свойствами, характерными для однородных многогранников. Все его грани суть правильные многоугольники, причём каждая отделяется ребром в точности от одной грани. Все многогранные углы тетраэдра также равны между собой.

Куб, или гексаэдр (шестигранник – от греческого «гекса», т.е. шесть) – самый общеизвестный и широко используемый многогранник. Все шесть его граней – квадраты, сходящиеся по два вдоль каждого ребра и по три в каждой вершине.

Октаэдр (восьмигранник – от греческого «окта», т.е. восемь), составленный из восьми правильных треугольников, его противоположные грани лежат в параллельных плоскостях.

Икосаэдр (двадцатигранник – от греческого «икос», т.е. двадцать), составленный из двадцати правильных треугольников.
Икосаэдр – одно из пяти тел, по простоте следующее за тетраэдром и октаэдром. Их объединяет то обстоятельство, что гранями каждого являются равносторонние треугольники.

Додекаэдр (двенадцатигранник – от греческого «додека», т.е. двенадцать), составленный из двенадцати правильных пятиугольников. В известном смысле додекаэдр представляет наибольшую привлекательность среди тел, соперничая с икосаэдром, который почти ему не уступает (а быть может, в чём-то и превосходит).

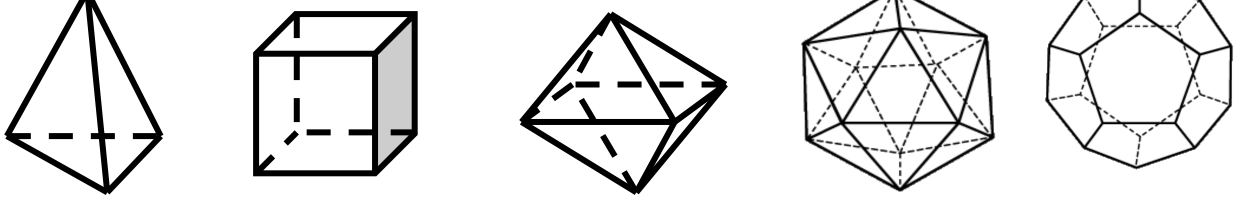


Рис.38. Правильные многогранники

Одним из способов изготовления правильных многогранников является способ с использованием так называемых развёрток.

Если модель поверхности многогранника изготовлена из гибкого нерастяжимого материала (бумаги, тонкого картона и т. п.), то эту модель можно разрезать по нескольким рёбрам и развернуть так, что она превратится в модель некоторого многоугольника. Этот многоугольник называют развёрткой поверхности многогранника. Для получения модели многогранника удобно сначала изготовить развёртку его поверхности. При этом необходимыми инструментами являются клей и ножницы. Модели многогранников можно сделать, пользуясь одной разверткой, на которой будут расположены все грани. Однако в этом случае все грани будут одного цвета.

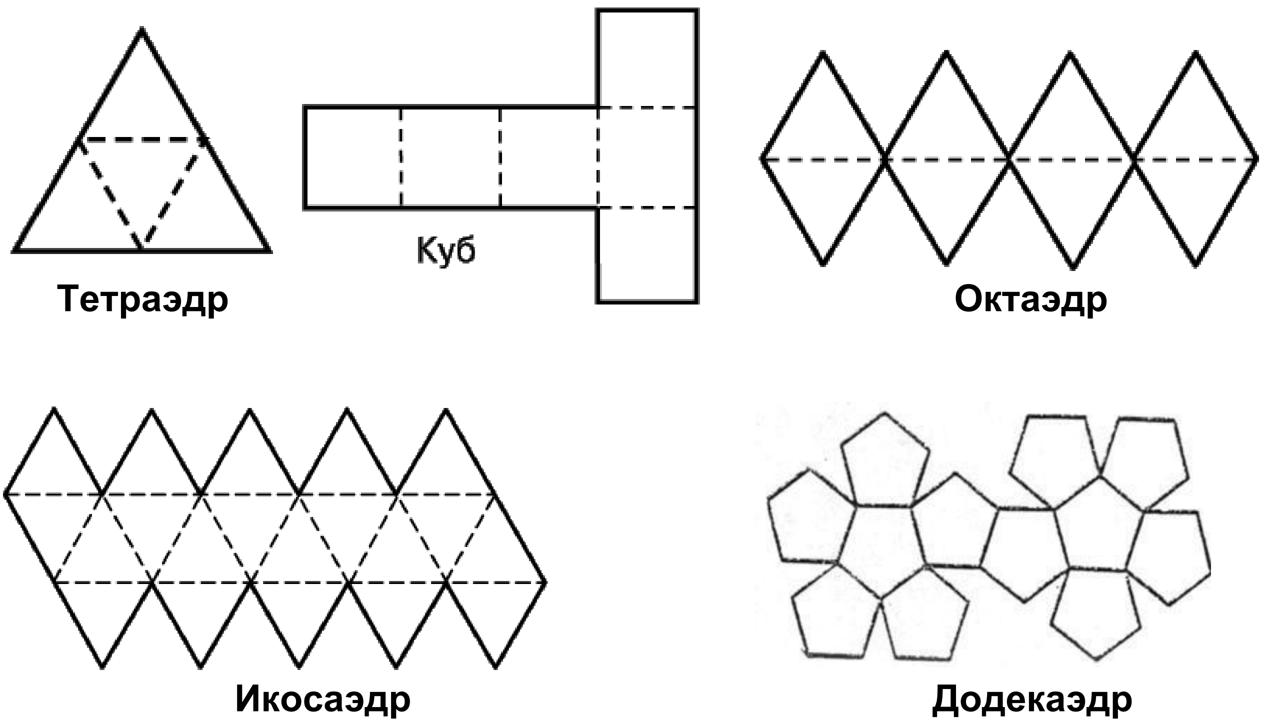


Рис.39. Развертки правильных многогранников

Форма контроля: отчет

Практическая работа №14

Вычисление площадей поверхностей многогранников

Количество часов на выполнение: 2 часа

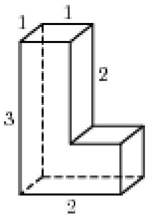
Цель работы: Систематизация и закрепление теоретического материала; формирование умений вычислять площадей поверхности различных геометрических тел.

Задание:

1. Найдите площадь поверхности многогранника.
2. Найдите площадь поверхности тела вращения.

Вариант 1,6,11,16

1.Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

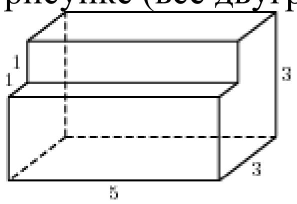


2.Радиус основания цилиндра равен 2, высота равна 3. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π.

3. Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2, 3. Найдите его площадь поверхности.

Вариант 2,7,12,17

1.Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

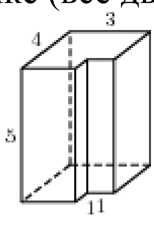


2. Площадь большого круга шара равна 3. Найдите площадь поверхности шара.

3. Диагональ грани куба равна 3. Найдите площадь его поверхности.

Вариант 3,8,13,18

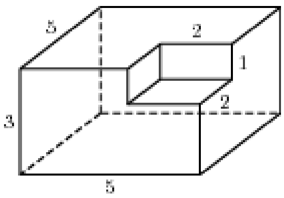
1.Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



2. Длина окружности основания цилиндра равна 3, высота равна 2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.
3. Площадь осевого сечения цилиндра равна 4. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, деленную на π .

Вариант 4,9,14,19

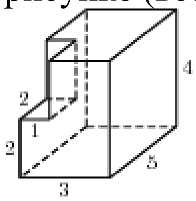
1.Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



2.Длина окружности основания конуса равна 3, образующая равна 2. Найдите площадь боковой поверхности конуса.
3. Диагональ грани куба равна 3. Найдите площадь его поверхности.

Вариант 5,10,15,20

1.Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



2. Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите площадь его полной поверхности, деленную на π .
3. Ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2, 3. Найдите его площадь поверхности.

Методические указания:

Основные формулы

1) Произвольная призма ($S_{осн}$ — площадь основания; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; $S_{полн}$ — площадь полной поверхности):

$$S_{полн}=2S_{осн}+S_{бок}.$$

2) Прямая призма (P — периметр основания; H — высота):

$$S_{бок}=P\cdot H.$$

3) Произвольная пирамида ($S_{осн}$ — площадь основания; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности; $S_{полн}$ — площадь полной поверхности):

$$S_{полн}=S_{осн}+S_{бок}.$$

4) Правильная пирамида (P — периметр основания;
l — апофема; $S_{бок}$ — площадь боковой поверхности):

$$S_{бок}=\frac{1}{2}P\cdot l \quad .$$

5) Цилиндр (R — радиус основания; H — высота;

$S_{бок}$ — площадь боковой поверхности):

$$S_{бок} = 2\pi RH.$$

6) Конус (R — радиус основания; H — высота; l — образующая;— $S_{бок}$ площадь боковой поверхности):

$$S_{\hat{a}\hat{i}\hat{e}} = \pi Rl.$$

7) Шар, сфера (R — радиус шара; S — площадь сферической поверхности):

$$S = 4\pi R^2.$$

8) Шаровой сегмент (R — радиус шара; h — высота сегмента; S — площадь сферической поверхности сегмента):

$$S = 2\pi Rh.$$

Пример:

Вычислите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если её ребра равны 5, а радиус окружности, описанной вокруг основания равен $3\sqrt{2}$.

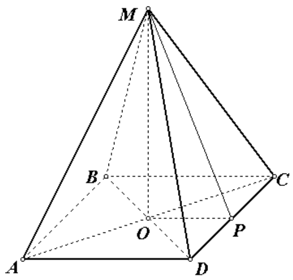


Рис.40. Правильная пирамида

Решение. $S = \frac{1}{2} P \cdot h$

1) найдем сторону основания по формуле $a = R\sqrt{2}$, т.е. $a = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 6$.

2) найдем периметр основания: $P = 4a$, $P = 24$.

3) из прямоугольного треугольника MDP по теореме Пифагора находим апофему MP: $MP = \sqrt{MD^2 - DP^2}$,$DP = \frac{a}{2}$

тогда: $MP = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4$.

4)вычислим площадь боковой поверхности пирамиды:

$$S = \frac{1}{2} P \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 4 = 48.$$

Ответ. 48.

Форма контроля: отчет

Практическая работа №15

Вычисление объемов многогранников.

Количество часов на выполнение: 2 часа

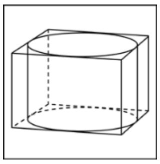
Цель работы: Систематизация и закрепление теоретического материала; формирование умений вычислять объемы различных многогранников.

Задание:

1. Найти объем поверхности многогранника.
2. Найти объем поверхности тела вращения.

Вариант 1,6,11,16

1.Прямоугольный параллелепипед описан около цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1. Найдите объем параллелепипеда.



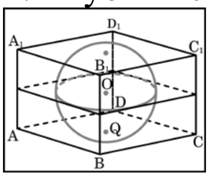
2.Найдите объем правильной шестиугольной призмы, стороны основания которой равны 1, а боковые ребра равны $\sqrt{3}$.

3.Найдите объем V конуса, образующая которого равна 2 и наклонена к плоскости основания под углом 30°. В ответе укажите $\frac{V}{\pi}$.

4. Площадь поверхности шара равна 1000см². Найти объем шара.

Вариант 2,7,12,17

1.В куб вписан шар радиуса 1. Найдите объем куба.



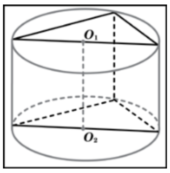
2.Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8, боковое ребро равно 5. Найдите объем призмы.

3. Диаметр основания конуса равен 6, а угол при вершине осевого сечения равен 90°. Вычислите объем конуса, деленный на π.

4.Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 2, боковое ребро равно 4. Найдите объем пирамиды.

Вариант 3,8,13,18

1.В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8. Боковые ребра равны $\frac{5}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



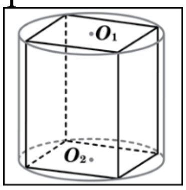
2. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.

3. Высота конуса равна 6, образующая равна 10. Найдите его объем, деленный на π.

4. Сторона основания правильной шестиугольной пирамиды равна 4, а угол между боковой гранью и основанием равен 45°. Найдите объем пирамиды.

Вариант 4,9,14,19

1.В основании прямой призмы лежит квадрат со стороной 2. Боковые ребра равны $\frac{2}{\pi}$. Найдите объем цилиндра, описанного около этой призмы.



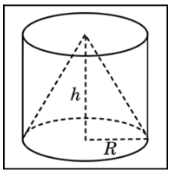
2.Найдите объем правильной треугольной пирамиды, стороны основания которой равны 1, а высота равна $\sqrt{3}$.

3. Конус получается при вращении равнобедренного прямоугольного треугольника ABC вокруг катета, равного 6. Найдите его объем, деленный на π.

4. Площадь поверхности куба равна 24. Найдите его объем.

Вариант 5,10,15,20

1.Цилиндр и конус имеют общее основание и общую высоту. Вычислите объем цилиндра, если объем конуса равен 25.



2.Диагональ куба равна $\sqrt{12}$. Найдите его объем.

3. Объем конуса равен 16. Через середину высоты параллельно основанию конуса проведено сечение, которое является основанием меньшего конуса с той же вершиной. Найдите объем меньшего конуса

4. Прямоугольник со сторонами 4см и 5см вращается вокруг меньшей стороны. Найти объем тела, полученного при вращении этого прямоугольника.

Методические указания:

Основные формулы

1). Произвольная призма (S - площадь основания; H - высота; V -объём):

$$V = S \cdot H .$$

2). Прямая призма (P - периметр основания; l - боковое ребро; S_b - боковая поверхность):

$$S_b = P \cdot l.$$

3). Прямоугольный параллелепипед (a,b,c - его измерения; d - диагональ):

$$V = abc; \;\; d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

4). Куб (a - ребро):

$$V = a^3; \;\; d = a\sqrt{3}.$$

5). Произвольная пирамида (S - площадь основания; H - высота; V - объём):

$$V = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

6). Правильная пирамида (P - периметр основания; l - апофема; S_b - площадь боковой поверхности):

$$S_b = \frac{1}{2} P \cdot l; \;\; V = \frac{1}{3} S \cdot H.$$

7). Произвольная усечённая пирамида (S_1 и S_2 — площади оснований; h - высота; V - объём):

$$V = \frac{1}{3} h\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right).$$

8). Цилиндр (R - радиус основания; H - высота; S_b - площадь боковой поверхности; V -объём):

$$S_b = 2\pi RH; \;\; V = \pi R^2 H.$$

9). Конус (R - радиус основания; H - высота; l - образующая; S_b - площадь боковой поверхности; V - объём):

$$S_b = \pi Rl; \; V = \frac{1}{3} \pi R^2 H.$$

10). Шар, сфера (R - адиус шара; S - площадь сферической поверхности; V - объём):

$$S = 4\pi R^2; \;\; V = 4/3 \cdot \pi R^3.$$

11). Шаровой сегмент (R -радиус шара; h - высота сегмента; S —- площадь сферической поверхности сегмента; V - объём):

$$S = 2\pi Rh; \;\; V = \pi h^2 \left(R - \frac{1}{3} h\right).$$

12). Шаровой сектор (R - радиус шара ; h - высота сегмента; V — объём):

$$V = \frac{2}{3} \pi R^2 h.$$

Пример:

Вычислите объём правильной треугольной пирамиды, если радиус описанной вокруг основания окружности равен $\sqrt{3}$, а высота пирамиды равна $4\sqrt{3}$.

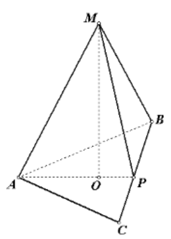


Рис.41. Правильная треугольная пирамида

Решение. $V=\frac{1}{3}S\cdot H$.

1) найдем сторону основания правильной пирамиды по формуле $a=R\sqrt{3}$, $a=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}=3$.

2) найдем площадь основания, как площадь правильного треугольника $S=\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}$, $S=\frac{9\sqrt{3}}{4}$.

3) вычислим объём пирамиды

$V=\frac{1}{3}\cdot S\cdot H$, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{9\sqrt{3}}{4}\cdot 4\sqrt{3}=9$.

Ответ. 9

Форма контроля: отчет

Практическая работа №16

Вычисление площадей поверхностей тел вращения

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: Систематизация и закрепление теоретического материала; формирование умений вычислять площади поверхностей тел вращения.

Задание:

1)Прямоугольный треугольник с катетами 3см и 4см вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площади боковой и полной поверхностей образованного при этом вращении катета.

2)Диаметр основания цилиндра равен 1м, высота цилиндра равна длине окружности основания. Найдите площадь и боковой поверхности цилиндра.

3)Прямоугольный треугольник с катетами 6см и 8см вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площади боковой и полной поверхностей образованного при этом вращении катета.

3)Вычислите площадь поверхности и радиус шара, если его объем равен $V = 113{,}04\ см^3$.

4)Диаметр основания цилиндра равен 2м, высота цилиндра равна длине окружности основания. Найдите площадь и боковой поверхности цилиндра.

Методические указания:

Телом вращения называется такое тело, которое плоскостями, перпендикулярными некоторой прямой (оси вращения), пересекается по кругам с центрами на этой прямой.

Шаровой или сферической поверхностью называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от данной точки, называемой центром шара

Площадь поверхности шара равна: $S_б = 4 \pi R^2$

Конусом называется тело ограниченное конической поверхностью и кругом.

Площадь боковой поверхности конуса равна :$S_б = \pi r L$

Полная площадь поверхности конуса равна: $S_б = \pi r L + \pi r^2 = \pi r (L + r)$

<u>Усеченным конусом</u> называется тело, полученное вращением прямоугольной трапеции вокруг стороны.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна: $S_б = \pi L (R + r)$

где L — длина образующей, R — радиус окружности нижнего

Полная площадь поверхности усеченного конуса равна:

$S_б = \pi (R^2 + r^2 + RL + rL)$

основания, r - радиус окружности верхнего основания.

<u>Цилиндром</u> называется тело, ограниченное замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна:

$S_б = 2\pi rh$

Полная поверхность цилиндра равна:

$$S_б = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r)$$

Площадь боковой поверхности конуса равна $S_б = \pi r L$

Полная площадь поверхности конуса равна:

$S_б = \pi r L + \pi r^2 = \pi r (L + r)$

<u>Пример1.</u> Прямоугольный треугольник с катетами 6см и 8 см вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площади боковой и полной поверхностей образованного при этом вращении конуса.

<u>Решение:</u> Для решения данной задачи нужны формулы:

$$S_б = \pi r L, \qquad S_п = \pi r (L + r)$$

Радиус r основания конуса совпадает с катетом равным 8см.Образующая в прямоугольном треугольнике является гипотенузой, поэтому ее найдем по Теореме Пифагора: $L = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ см

$S_б = \pi \cdot 8 \cdot 10 = 80\pi см^2$; $S_п = \pi \cdot 8(10 + 8) = 144 см^2$

Ответ: $S_б = 80\pi см^2$; $S_п = 144\pi см^2$

<u>Пример2.</u>Диаметр основания цилиндра равен 1м, высота цилиндра равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

<u>Решение:</u> Длина окружности вычисляется по формуле: $C = 2\pi \cdot R,$ где R- радиус, т.к. диаметр окружности равен 1м, то радиус равен 50см. $C = 2\pi \cdot 50см = \pi м.$ Отсюда $h = \pi м$, остается подставить найденные значения в формулу $S_б = 2\pi rh,$ $S_б = 2\pi \cdot 50см \cdot \pi м = 1\pi^2 м^2 = \pi^2 м^2.$

Ответ: $S_б = \pi^2 м^2.$

<u>Пример3.</u> Пусть V- объем шара радиуса R, S- площадь его поверхности. Найдите R и V, если S=64$\pi см^2$.

<u>Решение:</u> Объем шара вычисляется по формуле $V = {}^4/_3\, \pi R^3 H,$ а площадь поверхности шара $S_б = 4\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{4 \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{64\pi см^2}{4\pi}} = \sqrt{16см^2} = 4см$, радиус R=4см. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 см^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 64см^3 = \frac{256}{3}\pi см^3$.

Ответ: $R = 4см$, $V = \frac{256}{3}\pi см^3$

Практическая работа №17

Тема: Вычисление объемов тел вращения

Количество часов: 2 часа

Цель работы: Систематизация и закрепление теоретического материала; формирование умений вычислять объемы тел вращения

Задание:

1) Найти радиус основания цилиндра.
2) Вычислить площадь боковой и полной поверхностей конуса.
3) Вычислить объем и радиус шара
4) Найти площадь боковой поверхности цилиндра
5) Найти объем конуса

Задания по вариантам:

Вариант 1

1)Пусть V – объем, h – высота, a r – радиус цилиндра. Найдите радиус цилиндра, если $V = 468 см^3$, h=13см.

2)Прямоугольный треугольник с катетами 3см и 4см вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площади боковой и полной поверхностей образованного при этом вращении катета.

3)Вычислите объем и радиус шара, если площадь его поверхности равна $S = 64\pi\ см^2$.

4)Диаметр основания цилиндра равен 1м, высота цилиндра равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

5)Площадь полной поверхности конуса равна $45\pi\ см^2$. Развертка боковой поверхности конуса представляет собой круговой сектор с дугой в $60°$. Найдите объем конуса.

Вариант 2

1)Пусть V – объем, h – высота, a r – радиус цилиндра. Найдите радиус цилиндра, если $V = 768 см^3$, h=12см.

2)Прямоугольный треугольник с катетами 6см и 8см вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площади боковой и полной поверхностей образованного при этом вращении катета.

3)Вычислите площадь поверхности и радиус шара, если его объем равен $V = 113{,}04\ см^3$.

4)Диаметр основания цилиндра равен 2м, высота цилиндра равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

5)Площадь полной поверхности конуса равна $45\pi\ см^2$. Развертка боковой поверхности конуса представляет собой круговой сектор с дугой в $30°$. Найдите объем конуса.

Методические указания:

Телом вращения называется такое тело, которое плоскостями, перпендикулярными некоторой прямой (оси вращения), пересекается по кругам с центрами на этой прямой.

Шаровой или сферической поверхностью называется геометрическое место точек пространства, равноудаленных от данной точки, называемой центром шара

Площадь поверхности шара равна: $S_б = 4\pi R^2$

Объем шара равен :$V = {}^4/_3 \cdot \pi R^3 H$

Конусом называется тело ограниченное конической поверхностью и кругом.

Площадь боковой поверхности конуса равна :$S_б = \pi r L$

Полная площадь поверхности конуса равна: $S_б = \pi r L + \pi r^2 = \pi r (L + r)$

Усеченным конусом называется тело, полученное вращением прямоугольной трапеции вокруг стороны.

Площадь боковой поверхности усеченного конуса равна: $S_б = \pi L (R + r)$ где L — длина образующей, R — радиус окружности нижнего основания, r - радиус окружности верхнего основания.

Полная площадь поверхности усеченного конуса равна:
$S_б = \pi (R^2 + r^2 + RL + rL)$

Объем конуса равен:

$$V = {}^1/_3 \cdot \pi R^2 H$$

Цилиндром называется тело, ограниченное замкнутой цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями.

Площадь боковой поверхности цилиндра равна:

$$S_б = 2\pi rh$$

Полная поверхность цилиндра равна:

$$S_б = 2\pi rh + 2\pi r^2 = 2\pi r (h + r)$$

Площадь боковой поверхности конуса равна $S_б = \pi r L$

Полная площадь поверхности конуса равна:

$$S_б = \pi r L + \pi r^2 = \pi r (L + r)$$

Объем цилиндра равен: $V = \pi R^2 H$

Пример1. Прямоугольный треугольник с катетами 6см и 8 см вращается вокруг меньшего катета. Вычислите площади боковой и полной поверхностей образованного при этом вращении конуса.

Решение: Для решения данной задачи нужны формулы:

Радиус r основания конуса совпадает с катетом равным 8см.Образующая в прямоугольном треугольнике является гипотенузой, поэтому ее найдем по Теореме Пифагора: $L = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ см

$S_б = \pi \cdot 8 \cdot 10 = 80\pi см^2$; $S_п = \pi \cdot 8(10 + 8) = 144 см^2$

Ответ: $S_б = 80\pi см^2$; $S_п = 144\pi см^2$

Пример2.Диаметр основания цилиндра равен 1м, высота цилиндра равна длине окружности основания. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение: Длина окружности вычисляется по формуле: $C = 2\pi \cdot R,$ где R-радиус, т.к. диаметр окружности равен 1м, то радиус равен 50см. $C = 2\pi \cdot 50 см = \pi м.$ Отсюда $h = \pi м$, остается подставить найденные значения в формулу $S_б = 2\pi rh,$ $S_б = 2\pi \cdot 50 см \cdot \pi м = 1\pi^2 м^2 = \pi^2 м^2.$

Ответ: $S_б = \pi^2 м^2.$

Пример3. Пусть V- объем шара радиуса R, S- площадь его поверхности. Найдите R и V, если S=64 $\pi см^2$.

<u>Решение:</u> Объем шара вычисляется по формуле $V = {}^4/_3\, \pi R^3 H,$ а площадь поверхности шара $S_б = 4 \pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{S}{4 \cdot \pi}} = \sqrt{\frac{64\pi см^2}{4\pi}} = \sqrt{16 см^2} = 4 см$, радиус R=4см. $V = \frac{4}{3}\pi \cdot 4^3 см^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 64 см^3 = \frac{256}{3}\pi см^3$.

Форма контроля: отчет

Практическая работа №18

Действия с векторами

Количество часов на выполнение 2 часа

Цель работы: Закрепление и систематизация знаний об основных понятиях векторной алгебры; формирование умений применять формулы векторной алгебры на плоскости и в пространстве.

Задание:

Выполнить действия с векторами, заданными координатами

$(\bar{a}+\bar{b})-3\bar{c}$

$2\bar{b}-4(\bar{a}-\bar{c})$

$\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})$

1. Найдите координаты вектора $\vec{p}=2\vec{a}-\vec{в}+\vec{c}$.
2. Найти скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
3. Найти угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{c}$.
4. Найти длины векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ $\bar{c}$.

Задание:

	$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$		$\bar{a}$	$\bar{b}$	$\bar{c}$
1	1;-2;5	-4;3;6	3;-2;0	**11**	1;2;3	-5;4;-3	7;0;1
2	-1;4;6	2;5;7	0;-2;-1	**12**	8;0;-2	4;6;-4	2;-2;4
3	3;5;7	-1;-7;3	-9;1;1	**13**	6;1;-1	-4;3;1	0;7;-5
4	2;-2;0	4;-6;-2	-8;0;2	**14**	2;-1;1	0;3;-1	4;3;1
5	3;1;-1	5;-3;1	-1;1;-1	**15**	0;4;3	8;-2;-1	-2;6;5
6	4;0;-2	2;-2-6	4;-4;8	**16**	3;-1;2	-1;-5;-6	1;5;-4
7	7;-1;1	-3;5;1	1;1;-1	**17**	-1;2;-5	-3;-4;1	3;2;5
8	5;2;1	-3;0;7	1;4;-3	**18**	1;4;-6	7;-2;8	1;2;-10
9	1;-1;2	3;3;-4	-7;1;0	**19**	3;-5;7	-1;7;3	-9;1;-1
10	2;-2;0	-4;2;8	0;-4;0	**20**	-2;2;0	4;6;-2	8;0;-2

Методические указания:

Вектором называется направленный отрезок.

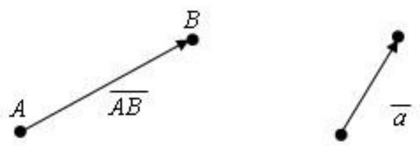


Рис.42. Векторы на плоскости

Правила действия над векторами.

Каждая координата суммы двух или более векторов равна сумме соответствующих координат этих векторов. Если $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}$, то $\bar{c}\{x_1+x_2; y_1+y_2; z_1+z_2\}$; где $\bar{a}\{x_1; y_1; z_1\}$, $\bar{b}\{x_2; y_2; z_2\}$.

Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат этих векторов. Если $\bar{a} - \bar{b} = \bar{c}$, то $\bar{c}\{x_1-x_2; y_1-y_2; z_1-z_2\}$.

Каждая координата произведения вектора на число равна произведению соответствующей координаты вектора на это число. Если $k\bar{a} = \bar{b}$, то $\bar{b}\{kx_1; ky_1; kz_1\}$.

Вычисление длины вектора по его координатам.

Пусть $\vec{a}\{x_1; y_1; z_1\}$, тогда $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$

Угол между векторами вычисляется по формуле $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

В координатах эта формула имеет вид: $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$

Форма контроля: отчет

Практическая работа №19

Решение задач с помощью графов

Количество часов на выполнение 2 часа

Цель работы: обобщение и систеатизация умений и знаний на выполнение операций над графами.

Задание:

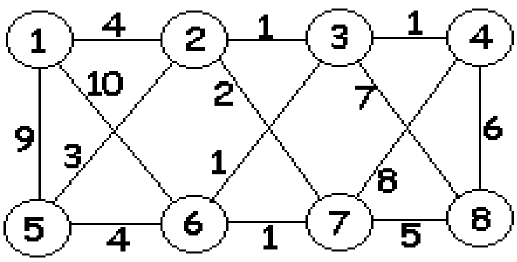
1) Дать определение понятия графа.
2) Перечислите основные виды графов.
3) Перечислите способы задания графов.
4) Перечислите операции над графами.

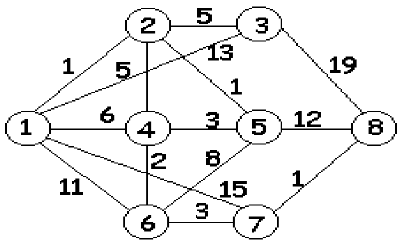
1. Дан граф

А) Запишите количество ребер и вершин графа;

В) Определить кратчайший путь из вершины 1 в вершину 8 для графа, представленного на рисунке;

С) Запишите номера вершин, имеющих одинаковую степень**:**

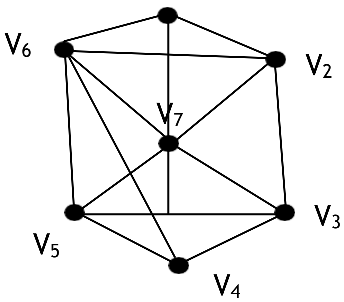




2. Граф задан диаграммой.

А) Составьте маршруты длины 5 из вершиныV_2 в вершину V_5.

Б) Составьте простую цепь, соединяющую эти вершины.

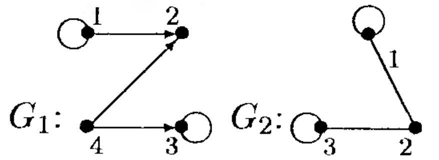


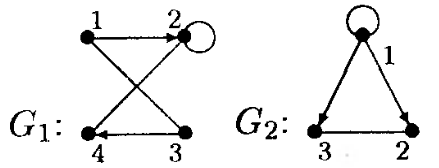
В) Постройте простой цикл, содержащий вершину V_4, V_1

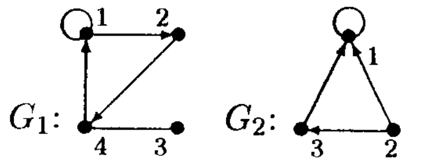
3. Сумма степеней вершин графа равна 8. Найдите число ребер.

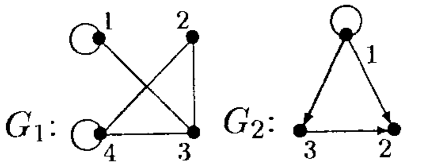
4. Число ребер графа равно 12. Найти сумму степеней вершин графа.

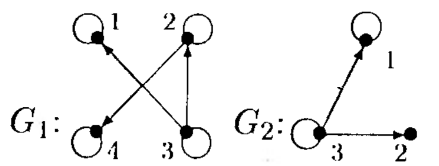
5. Даны графы G_1 и G_2. Найдите $G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2$, $G_1 \oplus G_2$, $G_1(G_2)$, $G_2(G_1)$, $G_1 \times G_2$, $G_1 + G_2$. Для графа $G_1 \cup G_2$ найдите матрицы смежности, инцидентности, сильных компонент, маршрутов длины 2 и все маршруты длины 2, исходящие из вершины 1 согласно варианту.

1. 

2. 

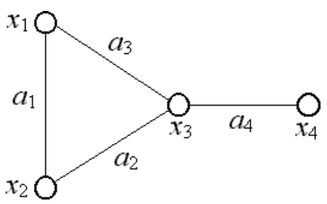
3. 

4. 

5. 

Методика выполнения задания:

1.Определите степени вершин графа:



Решение: степень вершины графа – это количество ребер, исходящих из этой вершины. $P(x_1) = 2$; $p(x_2) = 2$; $p(x_3) = 3$; $p(x_4) = 1$

2.Определить сумму степеней данного графа.

Решение: сумма степеней графа равна удвоенному числу ребер графа. Так как ребер в данном графе 4,то сумма степеней вершин равна 8.

Граф – это система, которая интуитивно может быть рассмотрена как множество кружков и множество соединяющих их линий (геометрический способ задания графа изображен на рисунке 1). Кружки называются *вершинами* графа, линии со стрелками – *дугами*, без стрелок – *рёбрами*.

Граф, в котором направление линий не выделяется (все линии являются ребрами), называется *неориентированным*; граф, в котором направление линий принципиально (линии являются дугами) называется *ориентированным*.

Теория графов может рассматриваться как раздел дискретной математики (точнее – теории множеств), и тогда определение графа таково:

Граф – это конечное множество X, состоящее из n элементов $(X = \{1, 2, ...n\})$ называемых вершинами графа, и подмножество V декартова произведения $X \times X$, называемое множеством дуг.

Ориентированным графом G (орграфом) называется совокупность (X, V).

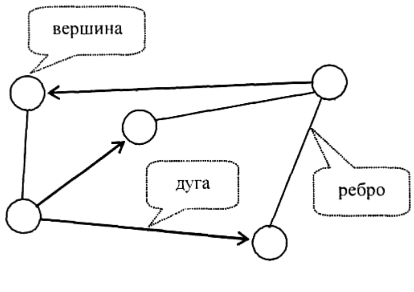
Неориентированным графом называется совокупность множеств X и множества неупорядоченных пар элементов, каждый из которых принадлежит множеству X.

Дугу между вершинами i и j, $i, j \in X$, будем обозначать (i, j). Число дуг графа будем обозначать $m(V = (v_1, v_2, ...v_m))$.

Подграфом называется часть графа, образованная подмножеством вершин вместе со всеми рёбрами (дугами), соединяющими вершины из этого множества. Если в графе удалить часть рёбер (дуг), то получим *частичный граф*.

Две вершины называются *смежными,* если они соединены ребром (дугой). Смежные вершины называются *граничными вершинами соответствующего ребра* (дуги), а это ребро (дуга) – *инцидентным соответствующим вершинам*.

Граф называется *полным*, если каждые две вершины его соединены одним и только одним ребром.



Граф, для которого из $(i, j) \in V$ следует $(j,i) \in V$ называется *симметричным*. Если из $(i, j) \in V$ следует $(j,i) \notin V$, то соответствующий граф называется *антисимметричным*.

Операции над графами:

Рассмотрим графы $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$.

Дополнением графа $G_1(V_1, E_1)$ называется граф $\overline{G_1}(V_1, \overline{E_1})$, множеством вершин которого является множество V_1, а множеством его рёбер является множество $\overline{E_1} = \{e \in V_1 \times V_2 : e \notin E_1\}$.

Объединением графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ при условии, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$; $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, называется граф $G_1(V_1, E_1) \cup G_2(V_2, E_2)$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cup V_2$, а множеством его рёбер является множество $E_1 \cup E_2$.

Пересечением графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ называется граф $G_1(V_1, E_1) \cap G_2(V_2, E_2)$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cap V_2$, а множеством его рёбер является множество $E_1 \cap E_2$.

Суммой по модулю два графов $G_1(V_1, E_1)$ и $G_2(V_2, E_2)$ при условии, что $V_1 \cap V_2 = \varnothing$; $E_1 \cap E_2 = \varnothing$, называется граф $G_1(V_1, E_1) \oplus G_2(V_2, E_2)$, множеством вершин которого является множество $V_1 \cup V_2$, а множеством его рёбер – множество $E_1 \oplus E_2$. Т. е. этот граф не имеет изолированных вершин и состоит только из рёбер, присутствующих либо в первом графе, либо во втором графе, но не в обоих графах одновременно.

Форма контроля: отчет

Практическая работа №20

Задачи, приводящие к распределению Пуассона

Количество часов на выполнение 2 часа

Задание:

1) Случайный процесс $\xi(t)$ принимает два значения: +1 и –1. Число перемен знаков за время t подчиняется распределению Пуассона с параметром μ. В начальный момент времени оба значения равновероятны. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции этого процесса и определить, является ли этот процесс стационарным.

2) Случайный процесс $\xi(t)$ состоит из горизонтальных отрезков единичной длины, ординаты которых независимые случайные величины с плотностью $p(x) = \dfrac{|x|^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} e^{-|x|}$

Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $\xi(t)$. Определить, является ли данный процесс стационарным, по крайней мере в широком смысле.

3)U и V – независимые случайные величины, равномерно распределенные в интервале $[\alpha,b]$ и $[c,\delta]$ соответственно. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции процесса $S(t)=U+Vt$. Является ли этот процесс стационарным?

4)Случайный процесс задан в виде $\xi(t)=U\cos at+V\sin at$, где α – неслучайная величина, U и V – некоррелированные случайные величины, равномерно распределенные в интервале [–1,1] и [–2,2] соответственно. Найти математическое ожидание, дисперсию и функцию корреляции данного процесса. Является ли данный процесс стационарным?

5)Найти функцию ковариации процесса ввиде $\eta(t)=\xi(t)\cos(Bt+\phi)$, , где B – неслучайная величина, $\xi(t)$ – стационарный случайный процесс с математическим ожиданием μ и функцией ковариации $K(\tau)$, ϕ – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $[0,2\pi]$, $\xi(t)$ и ϕ – независимые. Является ли этот процесс стационарным?

6)Найти функцию взаимной ковариации процесса и его второй производной, если процесс $\xi(t)$ имеет математическое ожидание, равное αt, и функцию ковариации $K\xi(t,\sigma)=\varepsilon\text{-}(t+\sigma)$.

Методика выполнения задания:

Приближенная формула Пуассона

Рассмотрим сразу случай, когда n большое, а вот вероятность p - очень мала (редкие события), в этом случае требование $npq \geq 10$ не выполняется - формулы Муавра-Лапласа неприменимы, а вычисления по формуле Бернулли весьма трудоемки.

В этом случае обычно используется приближение, названное по имени другого французского математика - **формула Пуассона**:

$$P_n(k) = \frac{(np)^k}{k!} \cdot exp(-np) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot exp(-\lambda), \quad \lambda = np \leq 10, \quad p \leq 0,1.$$

Для вычислений в эксель по этой формуле можно вводить либо непосредственно саму формулу, например: =СТЕПЕНЬ(lambda;k)/ФАКТР(k)*EXP(-lambda) или использовать встроенную функцию =ПУАССОН(k;lambda;1) (удобно для вычисления попадания числа наступлений события в интервал):

=-ПУАССОН(E37;lambda;1)+ПУАССОН(G37;lambda;1)+ПУАССОН(E37;lambda;0)

ПУАССОН(x; среднее; интегральная)

B	C	D	E	F	G	H	I
Вероятность того, что событие наступит более			k=	130		раз, равна	0,00000
Вычисления по приближенной формуле Пуассона (для np<10)							
lambda=np=	0,2						
Вероятность, что событие наступит в точности			k=	2		раз, равна	0,01637
Вероятность, что событие наступит от k1=			1	до k2=	2	раз, равна	1)+ПУАСС

И формулы Лапласа, и Пуассона внесены в один шаблон Excel, будьте внимательны, выбирайте те приближения, которые подходят вашей задаче. Ниже мы разберем несколько примеров со скриншотами.

Пример 1. *Стрелок выполнил 400 выстрелов, вероятность одного попадания 0,8. Найти вероятность того, что он попал от 310 до 325 раз.*

Решение. Получаем, что в задаче идет речь о повторных независимых испытаниях (выстрелах), всего их $n = 400$, вероятность попадания при каждом одинакова и равна $p = 0,8$, вероятность промаха $q = 1 - p = 1 - 0,8 = 0,2$. Нужно найти, что будет от 310 до 325 попаданий. Так как $np = 400 \cdot 0,8 \cdot 0,2 = 64 > 10$, можно использовать для вычисления интегральную теорему Лапласа (L2):

$$P_{400}(310 \leq k \leq 325) \approx \Phi\left(\frac{325 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) - \Phi\left(\frac{310 - 400 \cdot 0,8}{\sqrt{400 \cdot 0,8 \cdot 0,2}}\right) =$$
$$= \Phi(0,63) - \Phi(-1,25) = \Phi(0,63) + \Phi(1,25) = 0,234 + 0,3944 = 0,6284.$$

А вот это решение в файле эксель:

B	C	D	E	F	G	H	I
Число испытаний	n=	400					
Вероятность успеха	p=	0,8					
Вероятность неуспеха	q=	0,2					
Проверка применимости	npq=	64	>=10	ДА	*Если НЕТ используйте приближен*		
Вычисления по локальной теореме Лапласа (вероятность точного значения)							
Вероятность, что событие наступит в точности			k=	120		раз, равна	0,00000
Вычисления по интегральной теореме Лапласа (вероятность попадания в интервал значений)							
Вероятность, что событие наступит от k1=			310	до k2=	325	раз, равна	0,62836

Пример 2. *Игральный кубик подбросили 125 раз. Какова вероятность того, что цифра 2 появилась не более 40 раз? Более 30 раз?*

Решение. Сначала запишем данные задачи: $n = 125$ (число бросков), $p = 1/6 = 0,1667$ (вероятность выпадения цифры 2), $q = 1 - p = 5/6$. Снова обратимся к формулам Лапласа.

Найдем вероятность, что цифра 2 появилась не более 40 раз, то есть от 0 до 40 выпадений случилось:

$$P_{125}(0 \le k \le 40) \approx \Phi\left(\frac{40 - 125 \cdot 1/6}{\sqrt{125 \cdot 1/6 \cdot 5/6}}\right) - \Phi\left(\frac{0 - 125 \cdot 1/6}{\sqrt{125 \cdot 1/6 \cdot 5/6}}\right) =$$
$$= \Phi(4,6) - \Phi(-5) = \Phi(4,6) + \Phi(5) = 0,49999 + 0,5 = 0,99999.$$

Найдем вероятность, что цифра 2 появилась более 30 раз, то есть от 31 до 125 раз:

$$P_{125}(31 \le k \le 125) \approx \Phi\left(\frac{125 - 125 \cdot 1/6}{\sqrt{125 \cdot 1/6 \cdot 5/6}}\right) - \Phi\left(\frac{31 - 125 \cdot 1/6}{\sqrt{125 \cdot 1/6 \cdot 5/6}}\right) =$$
$$= \Phi(25) - \Phi(2,44) = 0,5 - 0,4927 = 0,0073.$$

Проведем эти же расчеты в нашем шаблоне эксель, вводя данные задачи в серые ячейки:

Число испытаний	n=	125				
Вероятность успеха	p=	0,1666667				
Вероятность неуспеха	q=	0,8333333				
Проверка применимости	npq=	17,361111	>=10	ДА	*Если НЕТ используйте приближен*	
Вычисления по локальной теореме Лапласа (вероятность точного значения)						
Вероятность, что событие наступит в точности	k=	20		раз, равна	**0,09385**	
Вычисления по интегральной теореме Лапласа (вероятность попадания в интервал значений)						
Вероятность, что событие наступит от k1=	20	до k2=	60	раз, равна	**0,57926**	
Вероятность того, что событие наступит менее	k=	40		раз, равна	**0,99999**	
Вероятность того, что событие наступит более	k=	30		раз, равна	**0,00734**	

Видно, что ответы совпадают.

Пример 3. *Аппаратура состоит из 1000 элементов. Вероятность отказа одного элемента за время T равна 0,001 и не зависит от работы других элементов. Какова вероятность отказа не менее двух элементов.*

Решение. Традиционно, начнем с формализации задачи: $n = 1000$ (число элементов в аппаратуре), $p = 0,001$ (вероятность отказа одного элемента), $q = 1 - p = 0,999$. Видим, что значение n очень велико, а вероятности отказа p редки, так что $npq = 0,999 < 10$, то есть приближение Лапласа неприменимо, зато отлично подойдет формула Пуассона.

Обозначим $\lambda = np = 1000 \cdot 0,001 = 1$, тогда вероятность наступления ровно k отказов элементов можно найти по формуле:

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} = \frac{1^k}{k!} \cdot e^{-1} = \frac{1}{k!} \cdot e^{-1}.$$

Найдем вероятность отказа не менее двух элементов:

$$P_{1000}(k \geq 2) = 1 - P_{1000}(k < 2) = 1 - P_{1000}(0) - P_{1000}(1) =$$
$$= 1 - \frac{1}{0!} \cdot e^{-1} - \frac{1}{1!} \cdot e^{-1} = 1 - 2e^{-1} \approx 0,264.$$

Найдем эту же вероятность с помощью нашего расчетного шаблона:

Число испытаний	n=	1000				
Вероятность успеха	p=	0,001				
Вероятность неуспеха	q=	0,999				
Проверка применимости	npq=	0,999	>=10	НЕТ	*Если НЕТ используйте приближе*	
Вычисления по локальной теореме Лапласа (вероятность точного значения)						
Вероятность, что событие наступит в точности		k=	20		раз, равна	**0,00000**
Вычисления по интегральной теореме Лапласа (вероятность попадания в интервал значений)						
Вероятность, что событие наступит от k1=		20	до k2=	60	раз, равна	**0,00000**
Вероятность того, что событие наступит менее		k=	40		раз, равна	**0,84147**
Вероятность того, что событие наступит более		k=	30		раз, равна	**0,00000**

Вычисления по приближенной формуле Пуассона (для np<10)						
lambda=np=	1					
Вероятность, что событие наступит в точности		k=	2		раз, равна	**0,18394**
Вероятность, что событие наступит от k1=		2	до k2=	1000	раз, равна	**0,26424**

Форма контроля: отчет

Методические указания по дисциплине ОУП.03 Математика составлены в соответствии с рабочей программой.

Составитель:
Перетолчина Юлия Николаевна, преподаватель

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к утверждению на заседании цикловой комиссии Монтажа и ремонта промышленного оборудования

Протокол № 3 от «6» 11 2025 г.
Председатель ЦК ____________ Т.В. Данилова

СОГЛАСОВАНО:
Заместитель декана по учебно-производственной работе
____________ П.М. Макогон
«6» 11 2025г.

УТВЕРЖДАЮ:
Заместитель декана
по учебной работе
____________И.А.Чинская