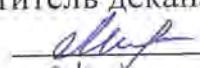


Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
ИРКУТСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ
Факультет среднего профессионального образования

УТВЕРЖДАЮ:
Заместитель декана по учебной работе
 В. А. Махутова
« 04 » 03 2021 г.

ОУДП. 01 МАТЕМАТИКА

Методические указания
по выполнению практических работ

Специальность	40.02.01 Право и организация социального обеспечения
Квалификация	Юрист
Форма обучения	очная
Год набора	2021

2021 г.

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине ОУДП.01 Математика составлены в соответствии с рабочей программой.

Составители:

Борходоева Александра Леонидовна, преподаватель

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к утверждению на заседании цикловой комиссии математических и естественно-научных дисциплин

Протокол № 5 от «26» 02 2021 г.

Председатель ЦК Александр / А.Л. Борходоева /

СОГЛАСОВАНО:

Начальник отдела по учебно-производственной работе/

С.Р. Кононенко / С.Р. Кононенко/

«24» 03 2021 г.

Содержание

Введение	4
Таблица – Перечень практических работ	9
Практическая работа № 1.	11
Практическая работа № 2.	16
Практическая работа № 3.	19
Практическая работа № 4.	22
Практическая работа № 5.	30
Практическая работа № 6.	34
Практическая работа №7.	39
Практическая работа № 8.	42
Практическая работа № 9.	46
Практическая работа № 10.	48
Практическая работа № 11.	49
Практическая работа № 12.	51
Практическая работа № 13.	54
Практическая работа № 14.	55
Практическая работа № 15.	59
Практическая работа № 16	61
Практическая работа № 17.	64
Практическая работа № 18.	67
Практическая работа № 19.	71

Введение

Цель методических указаний для выполнения практических работ: повторение и обобщение полученных знаний, формирование умений, личностных и метапредметных результатов обучения

Код	Требования к личностным результатам
Л.1.	российскую гражданскую идентичность, патриотизм, уважение к своему народу, чувства ответственности перед Родиной, гордости за свой край, свою Родину, прошлое и настоящее многонационального народа России, уважение государственных символов (герб, флаг, гимн);
Л.2.	гражданскую позицию как активного и ответственного члена российского общества, осознающего свои конституционные права и обязанности, уважающего закон и правопорядок, обладающего чувством собственного достоинства, осознанно принимающего традиционные национальные и общечеловеческие гуманистические и демократические ценности;
Л.3.	готовность к служению Отечеству, его защите;
Л.4.	сформированность мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, основанного на диалоге культур, а также различных форм общественного сознания, осознание своего места в поликультурном мире;
Л.5.	сформированность основ саморазвития и самовоспитания в соответствии с общечеловеческими ценностями и идеалами гражданского общества; готовность и способность к самостоятельной, творческой и ответственной деятельности;
Л.6.	толерантное сознание и поведение в поликультурном мире, готовность и способность вести диалог с другими людьми, достигать в нем взаимопонимания, находить общие цели и сотрудничать для их достижения, способность противостоять идеологии экстремизма, национализма, ксенофобии, дискриминации по социальным, религиозным, расовым, национальным признакам и другим негативным социальным явлениям;
Л.7.	навыки сотрудничества со сверстниками, детьми младшего возраста, взрослыми в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности;
Л.8.	нравственное сознание и поведение на основе усвоения общечеловеческих ценностей;
Л.9.	готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;
Л.10.	эстетическое отношение к миру, включая эстетику быта, научного и

	технического творчества, спорта, общественных отношений;
Л.11.	принятие и реализацию ценностей здорового и безопасного образа жизни, потребности в физическом самосовершенствовании, занятиях спортивно-оздоровительной деятельностью, неприятие вредных привычек: курения, употребления алкоголя, наркотиков;
Л.12.	бережное, ответственное и компетентное отношение к физическому и психологическому здоровью, как собственному, так и других людей, умение оказывать первую помощь;
Л.13.	осознанный выбор будущей профессии и возможностей реализации собственных жизненных планов; отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;
Л.14.	сформированность экологического мышления, понимания влияния социально-экономических процессов на состояние природной и социальной среды; приобретение опыта эколого-направленной деятельности;
Л.15.	ответственное отношение к созданию семьи на основе осознанного принятия ценностей семейной жизни.
	Требования к метапредметным результатам
М.1	умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;
М.2	умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;
М.3	владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;
М.4	готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, владение навыками получения необходимой информации из словарей разных типов, умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;
М.5	умение использовать средства информационных и коммуникационных технологий (далее - ИКТ) в решении когнитивных, коммуникативных и организационных задач с соблюдением требований эргономики, техники безопасности, гигиены, ресурсосбережения, правовых и этических норм, норм информационной безопасности;
М.6	умение определять назначение и функции различных социальных институтов;

М.7	умение самостоятельно оценивать и принимать решения, определяющие стратегию поведения, с учетом гражданских и нравственных ценностей;
М.8	владение языковыми средствами - умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;
М.9	владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств их достижения.
	Требования к предметным результатам
У.1	владение методами доказательств и алгоритмов решения; умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
У.2	владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения уравнений и неравенств;
У.3	владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать на чертежах, моделях и в реальном мире геометрические фигуры; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;
У.4	сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, о статистических закономерностях в реальном мире, об основных понятиях элементарной теории вероятностей; умений находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;
У.5	владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач;
3.1	сформированность представлений о математике как части мировой культуры и о месте математики в современной цивилизации, о способах описания на математическом языке явлений реального мира;
3.2	сформированность представлений о математических понятиях как о важнейших математических моделях, позволяющих описывать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности аксиоматического построения математических теорий;
3.3	сформированность представлений об основных понятиях, идеях и методах математического анализа;

Общее количество часов на практические работы по данной дисциплине – **39 часов.**

Информационное обеспечение:

Основная литература:

1. Богомолов, Н. В. Математика: учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/viewer/matematika-469433#page/1>

2. Богомолов, Николай Васильевич. Практические занятия по математике. В 2 ч.: учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. - 11-е изд., перераб. и доп. - Москва: Юрайт, 2020. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-08800-7. Ч. 1. - 2020. - 325 с.: рис., табл. - Библиогр.: с. 322-325. - ISBN 978-5-534-08799-4: 825.74 р.

3. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 326 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08799-4. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/viewer/prakticheskie-zanyatiya-po-matematike-v-2-ch-chast-1-470650#page/1>

4. Богомолов, Николай Васильевич. Практические занятия по математике. В 2 ч.: учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. - 11-е изд., перераб. и доп. - Москва: Юрайт, 2020. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-08800-7. Ч. 2. - 2020. - 250 с.: рис. - Библиогр.: с. 247-250. - ISBN 978-5-534-08803-8: 666.74 р.

5. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 2: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 251 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08803-8. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/viewer/prakticheskie-zanyatiya-po-matematike-v-2-ch-chast-2-470651#page/1>

6. Абдуллина, К. Р. Математика: учебник для СПО / К. Р. Абдуллина, Р. Г. Мухаметдинова. — Саратов: Профобразование, 2021. — 288 с. — ISBN 978-5-4488-0941-5. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО PROФобразование : [сайт]. — URL: <https://profspo.ru/webreader/web/viewer.php?publicationId=books/99917>

7. Юхно, Н. С. Математика: учебник / Н.С. Юхно. — Москва : ИНФРА-М, 2021. — 204 с. — (Среднее профессиональное образование). — DOI 10.12737/1002604. - ISBN 978-5-16-014744-4. - Текст : электронный. - URL: <https://znanium.com/read?id=375762>

Дополнительная литература:

1. Дадаян А. А. Математика: учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : ИНФРА-М, 2019. — 544 с. — (Среднее профессиональное образование) / <https://new.znanium.com/read?id=335845>
2. Богомолов, Н. В. Алгебра и начала анализа: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 240 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09525-8. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/viewer/algebra-i-nachala-analiza-469825#page/1>
3. Богомолов, Н. В. Геометрия: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 108 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09528-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/viewer/geometriya-469826#page/1>
4. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 1: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/viewer/matematika-zadachi-s-resheniyami-v-2-ch-chast-1-470790#page/1>
5. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 2: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 320 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09135-9. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/viewer/matematika-zadachi-s-resheniyami-v-2-ch-chast-2-470791#page/1>

Российские электронные ресурсы и базы данных

1. Электронная библиотека ИРНИТУ <http://elib.istu.edu/>
2. Образовательная платформа «Юрайт» <https://urait.ru/>
3. Научные электронные журналы на платформе eLIBRARY.RU <http://elibrary.ru/>
4. Электронная библиотека «Академия»: <https://academia-library.ru/>
5. Электронно-библиотечная система «Znanium.com»: <http://znanium.com/>
6. Электронно-библиотечная система «PRORFобразование»: <http://profspo.ru/>

Зарубежные электронные научные журналы и базы данных

1. База данных Springer Nature Experiments (ранее Springer Protocols): <https://experiments.springernature.com/>
2. Wiley Online Library: <http://onlinelibrary.wiley.com/>

Локальные базы данных

(доступ из читальных залов библиотеки университета)

1. Виртуальный читальный зал Президентской библиотеки им. Б.Н.Ельцина
2. Национальная электронная библиотека
3. Электронная справочная система «КонсультантПлюс»

Общие критерии оценки

Оценка «5». Работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности.

Оценка «4». Работа выполнена в полном объеме и самостоятельно. Допускаются отклонения от необходимой последовательности выполнения, не влияющие на правильность конечного результата

Оценка «3». Практическая работа выполнена и оформлена обучающимися при помощи преподавателя. Обучающиеся показывают знания теоретического материала, но испытывают затруднение при выполнении заданий.

Оценка «2» выставляется в том случае, когда обучающийся не подготовлен к выполнению этой работы. Показывается плохое знание теоретического материала и отсутствие необходимых умений.

Таблица – Перечень практических работ

№	Тема	Вид, номер и название работы	Результаты обучения (коды)	Количество часов
Семестр 1				
	Раздел 1. Алгебра			
1	Тема 1.1. Развитие понятия о числе	Практическая работа №1 Действия над комплексными числами в алгебраической форме	У.1, Л.5, Л.9, М.1, М.8, М.9	2
2	Тема 1.2. Корни, степени и логарифмы.	Практическая работа №2 Вычисление и преобразование степенных выражений.	У.1, Л.5, Л.9, М.1, М.8, М.9	2
3	Тема 1.2. Корни, степени и логарифмы.	Практическая работа №3 Вычисление значений логарифмов и логарифмических выражений	У.1, Л.5, Л.9, М.1, М.8, М.9	2
4	Тема 1.3. Основы	Практическая работа	3.3	2

	тригонометрии.	№4. Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой.		
5	Тема 1.3. Основы тригонометрии.	Практическая работа №5 Преобразование тригонометрических выражений	У.1, Л.5, Л.9, М.1, М.8, М.9	2
6	Тема 1.4. Функции, их свойства и графики.	Практическая работа №6 Свойства функции	У.1, Л.5, Л.9, М.1, М.8, М.9	2
7	Тема 1.5. Степенные, показательные, логарифмические и тригонометрические функции	Практическая работа №7 Построение графиков функций с помощью элементарных преобразований	У.1, Л.5, Л.9, М.1, М.8, М.9	2
8	Раздел 2. Координаты и векторы.	Практическая работа №8 Действия над векторами	У.3, Л.7, Л.9, М.3	2
	Раздел 4. Начала математического анализа			
9	Тема 4.1. Уравнения и неравенства	Практическая работа №9 Решение иррациональных уравнений.	У.1, У.2, Л.5, Л.9, М.1, М.8, М.9	2
10	Тема 4.1. Уравнения и неравенства	Практическая работа №10 Решение показательных уравнений.	У.1, У.2, Л.5, Л.9, М.1, М.3, М.4, М.8, М.9,	2
11	Тема 4.1. Уравнения и неравенства	Практическая работа №11 Решение логарифмических уравнений.	У.1, У.2, Л.5, Л.9, М.1, М.3, М.4, М.8, М.9	2
12	Тема 4.1. Уравнения и неравенства	Практическая работа №12 Решение тригонометрических уравнений	У.1, У.2, Л.5, Л.9, М.1, М.3, М.4, М.8, М.9	2
13	Тема 4.1. Уравнения и неравенства	Практическая работа №13 Решение показательных и логарифмических	У.1, У.2, Л.5, Л.9, М.1, М.3, М.4, М.8, М.9	2

		неравенств.		
14	Тема 4.3. Производная	Практическая работа №14 Вычисление производных	У.1, З.3, Л.5, Л.9, М.1, М.8, М.9	2
15	Тема 4.3. Производная	Практическая работа №15 Исследование функции и построение её графика	У.1, З.3, Л.5, Л.9, М.1, М.8, М.9	2
16	Тема 4.4. Первообразная и интеграл	Практическая работа №16 Вычисление неопределенных интегралов	У.1, З.3, Л.5, Л.9, М.1, М.8, М.9	2
17	Тема 4.4. Первообразная и интеграл	Практическая работа №17 Вычисление определенных интегралов	У.1, З.3, Л.5, Л.9, М.1, М.8, М.9	2
18	Тема 5.1. Прямые и плоскости в пространстве.	Практическая работа №18 Вычисление углов между прямой и плоскостью, плоскостями	У.1, У.3, Л.5, Л.9, М.1, М.8, М.9	2
19	Тема 5.4. Измерения в геометрии.	Практическая работа №20 Вычисление объемов многогранников. Вычисление объемов и площадей тел вращения	У.3, Л.7, Л.9, М.3	3
	Итого за год			39

Практическая работа № 1.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: научиться выполнять действия над комплексными числами в алгебраической форме

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов, тетрадь для практических работ.

Задание: Выполнить задачи на действия над комплексными числами в алгебраической форме.

1. Постройте радиусы-векторы, соответствующие комплексным числам:

1) $z = 2 - 3i$; 2) $z = -2 + 3i$; 3) $z = -2 - 3i$;

4) $z = \sqrt{2} + \sqrt{3}i$; 5) $z = 2 - \sqrt{3}i$.

2. Даны числа:

1) $z = 3 + i$; 2) $z = 3 - i$; 3) $z = -3 + i$; 4) $z = -3 - i$;

5) 3; 6) -3; 7) $-i$; 8) i .

Назовите числа, сопряженные и противоположные данным.

3. Дана точка, изображающая число $-3 + 2i$. Какие числа изображают точки, симметричные данной относительно: 1) действительной оси; 2) мнимой оси; 3) начала координат?

4. Найдите действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел:

1) $9 + 2ix + 4iy = 10i + 5x - 6y$;

2) $2ix + 3iy + 17 = 3x + 2y + 18i$;

3) $5x - 2y + (x + y)i = 4 + 5i$.

4) $x^2 - 5(x - 1) + 4i = yi - 1$;

5) $\frac{1}{x} - 4yi = 4$.

5. Найдите действительные значения x , при которых справедливо равенство $(x^2 + 1)i + 3 = x(x - 2i) - 2x$.

6. Найдите модуль комплексных чисел:

1) $z = 3$; 2) $z = -3$; 3) $z = 3i$; 4) $z = -3i$;

5) $z = -2 - 2i$; 6) $z = 1 + i\sqrt{3}$; 7) $z = 1 - i\sqrt{3}$; 8) $z = -\sqrt{3} + i$.

7. Выполните действия:

1) $(3 + i) + (-3 - 8i)$; 2) $(5 - 4i) + (7 + 4i)$; 3) $(-6 + 2i) + (-6 - 2i)$;

4) $(0,2 + 0,1i) + (0,8 - 1,1i)$; 5) $(2 - 3i) + (5 + 6i) + (-3 - 4i)$;

6) $(1 - i) - (7 - 3i) - (2 + i) + (6 - 2i)$.

8. Вычислите: 1) $i^6 + i^{20} + i^{30} + i^{36} + i^{54}$; 2) $i + i^2 + i^3 + i^4 + i^5$;

3) $i + i^{11} + i^{21} + i^{31} + i^{41}$; 4) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4$; 5) $\frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^5}$; 6) $\frac{1}{i^{13}} + \frac{1}{i^{23}} + \frac{1}{i^{33}}$.

9. Выполните действия:

1) $-i\sqrt{5} \cdot 4i\sqrt{5}$; 2) $(5 - 3i) \cdot 2i$; 3) $(3 + 4i)(3 - 4i)$;

$$4) (5+3i)(2-5i); \quad 5) (-2-i)(1+i); \quad 6) 4+2i+(-1+6i)(6-i);$$

$$7) (3-2i)(5+4i)-7i+1; \quad 8) \left(\frac{2}{3}-\frac{1}{3}i\right)\left(\frac{1}{3}+\frac{4}{3}i\right); \quad 9) (0,2-0,3i)(0,5+0,4i).$$

10. Выполните действия:

$$1) \frac{1}{i}; \quad 2) \frac{1}{1-i}; \quad 3) \frac{1-i}{1+i}; \quad 4) \frac{3-2i}{1+3i}; \quad 5) \frac{(1-2i)(2+i)}{3-2i};$$

$$6) \frac{2+3i}{(4+i)(2-2i)}; \quad 7) \frac{(3+2i)(2-i)}{(2+3i)(1+i)}; \quad 8) \frac{a+bi}{a-bi}; \quad 9) \frac{(a+bi)(b+ai)}{b-ai};$$

$$10) \frac{\sqrt{5}+i}{\sqrt{5}-2i}; \quad 11) \frac{1-3i}{i-2} + \frac{4i+1}{3i-1}; \quad 12) \frac{a+bi}{a-bi} - \frac{a-bi}{a+bi}.$$

11. Вычислите:

$$1) (1-i)^{12}; \quad 2) (1+i)^{17}; \quad 3) \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3; \quad 4) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^2;$$

$$5) (1+i)^{-2}; \quad 6) (1-i)^{-3}.$$

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Комплексные числа и их геометрическая интерпретация

Комплексными числами называются числа вида $a+bi$, где a и b - действительные числа, а число i , определяемое равенством $i^2 = -1$, называется мнимой единицей, если для этих чисел понятия равенства и действия сложения и умножения определены следующим образом:

1) два комплексных числа a_1+b_1i и a_2+b_2i называются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$;

2) суммой двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется комплексное число $(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$;

3) произведением двух комплексных чисел a_1+b_1i и a_2+b_2i называется комплексное число $(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$.

Запись комплексного числа в виде $z = a+bi$ называется алгебраической формой записи комплексного числа.

Действительное число a называется действительной частью комплексного числа $z = a+bi$, а действительное число b - мнимой частью.

Любое действительное число a содержится в множестве комплексных чисел, его можно записать так: $a = a+0 \cdot i$. Числа 0, 1 и i записываются соответственно в виде $0 = 0+0 \cdot i$, $1 = 1+0 \cdot i$ и $i = 0+1 \cdot i$.

При $a=0$ комплексное число $a+bi$ обращается в чисто мнимое число bi .

Комплексное число $a-bi$ называется комплексно сопряженным с числом $a+bi$ и обозначается $\bar{z}$, т.е. $\bar{z} = \overline{a+bi} = a-bi$.

Комплексные числа вида $a+bi$ и $-a-bi$ называются противоположными.

Модулем комплексного числа $z = a+bi$ называется число $\sqrt{a^2+b^2}$:

$$|z| = |a+bi| = \sqrt{a^2+b^2} \quad (1)$$

Модуль комплексного числа всегда есть действительное неотрицательное число: $|z| \geq 0$, причем $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$.

Комплексное число $z = a+bi$ можно изображать точкой плоскости с координатами $(a; b)$. При этом действительные числа изображаются точками оси абсцисс, которую называют действительной осью, а чисто мнимые числа – точками оси ординат, которую называют мнимой осью.

Каждой точке плоскости с координатами $(a; b)$ соответствует один и только один вектор с началом в точке $O(0; 0)$ и концом в точке $M(a; b)$. Поэтому комплексное число $a+bi$ можно изобразить в виде вектора $(\overrightarrow{OM}) = \bar{z}$ с началом в точке $z = 0$ и концом в точке $z = a+bi$.

Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Над комплексными числами производятся такие же действия, как и над действительными числами. Действия сложения и умножения даны в определении комплексного числа (см.п. 1).

Рассматривая вычитание и деление комплексных чисел как действия, обратные соответственно сложению и умножению, получаем правила вычитания и деления комплексных чисел:

$$(a_1 + b_1i) - (a_2 + b_2i) = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i;$$

$$\frac{a_1 + b_1i}{a_2 + b_2i} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i.$$

Типовые задания

Пример 1. Построить радиусы-векторы, соответствующие комплексным числам: 1) $z = 2$; 2) $z = -3$; 3) $z = 3i$; 4) $z = -2i$; 5) $z = 2 + 3i$.

Ответ: 1) $M_1(2; 0)$; 2) $M_2(-3; 0)$; 3) $M_3(0; 3)$; 4) $M_4(0; -2)$; 5) $M_5(2; 3)$

Пример 2. Найти действительные числа x и y из условия равенства двух комплексных чисел: $-2 + 5ix - 3iy = 9i + 2x - 4y$.

Решение. Выделим в обеих частях равенства действительные и мнимые части данных комплексных чисел:

$$-2 + (5x - 3y)i = 2x - 4y + 9i.$$

Теперь, используя равенство комплексных чисел, составим систему

$$\begin{cases} 2x - 4y = -2, \\ 5x - 3y = 9, \end{cases}$$

решив которую получим $x = 3$, $y = 2$.

1. Найти модуль комплексных чисел:

1) $z = i$; 2) $z = -5i$; 3) $z = 1 + i$; 4) $z = 2 - 2i$.

Решение. 1) Здесь $a = 0$, $b = 1$. По формуле (1) получим $r = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$;

2) Здесь $a = 0$, $b = -5$; находим $r = \sqrt{0^2 + (-5)^2} = 5$;

3) Здесь $a = 1$, $b = 1$ $r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$;

4) Здесь $a = 2$, $b = -2$ $r = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

Пример 3. Выполнить действия: 1) $(4 + 2i) + (1 + 5i)$;

2) $(3 + 5i) - (6 + 3i)$.

Решение.

1) По правилу сложения комплексных чисел получим

$$(4 + 2i) + (1 + 5i) = (4 + 1) + (2 + 5)i = 5 + 7i.$$

2) По правилу вычитания комплексных чисел получим

$$(3 + 5i) - (6 + 3i) = (3 - 6) + (5 - 3)i = -3 + 2i.$$

Сложение (вычитание) комплексных чисел сводится к сложению (вычитанию) векторов, изображающих эти числа.

Пример 4. Показать, что справедливы равенства $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Решение.

Так как $i^2 = -1$, то $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1)(-1) = 1$, $i^5 = i^4 \cdot i = i$, $i^6 = -1$, $i^7 = -i$, $i^8 = 1, \dots$. Следовательно, получаем четыре чередующихся значения: $i^{4k} = 1$, $i^{4k+1} = i$, $i^{4k+2} = -1$, $i^{4k+3} = -i$, где $k \in \mathbb{Z}$.

Пример 5. Вычислить: 1) i^{16} ; 2) i^{25} ; 3) i^{15} ; 4) $(-i)^8$; 5) $(-i)^7$.

Решение.

1) $i^{16} = i^{4 \cdot 4} = 1$; 2) $i^{25} = i^{4 \cdot 6 + 1} = i$; 3) $i^{15} = i^{4 \cdot 3 + 3} = i^3 = -i$;

4) $(-i)^8 = i^8 = i^{4 \cdot 2} = 1$; 5) $(-i)^7 = -i^7 = -(-i^{4+3}) = -i^3 = -(-i) = i$.

Пример 6. Выполнить действия:

$$1) 2i \cdot 3i; \quad 2) (2 - 3i)(2 + 3i); \quad 3) (5 - 4i)(3 + 2i).$$

Решение.

$$1) 2i \cdot 3i = 6i^2 = -6;$$

$$2) (2 - 3i)(2 + 3i) = 4 - 9i^2 = 4 + 9 = 13;$$

3) По правилу умножения комплексных чисел получим

$$(5 - 4i)(3 + 2i) = [5 \cdot 3 - (-4) \cdot 2] + i[5 \cdot 2 + 3(-4)] = 23 - 2i.$$

Можно произвести умножение по правилу умножения многочленов:

$$(5 - 4i)(3 + 2i) = 15 + 10i - 12i + 8 = 23 - 2i.$$

Пример 7. Выполнить действия:

$$1) \frac{2}{3i}; \quad 2) \frac{1}{1+i}; \quad 3) \frac{1+i}{1-i}; \quad 4) \frac{2-3i}{4+5i}.$$

Решение.

1) Умножив делимое и делитель на i , получим

$$\frac{2}{3i} = \frac{2i}{3i \cdot i} = \frac{2i}{-3} = -\frac{2}{3}i.$$

2) Умножаем делимое и делитель на множитель, сопряженный делителю:

$$\frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i}{1-i^2} = \frac{1-i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$3) \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+2i+i^2}{1-i^2} = \frac{2i}{2} = i.$$

$$4) \frac{2-3i}{4+5i} = \frac{(2-3i)(4-5i)}{(4+5i)(4-5i)} = \frac{8-10i-12i+15i^2}{16+25} = \frac{-7-22i}{41} = -\frac{7}{41} - \frac{22}{41}i.$$

Пример 8. Вычислить $(1+i)^8$.

Решение. Используя соотношение $(1+i)^2 = 2i$, получим

$$(1+i)^8 = \left[(1+i)^2\right]^4 = (2i)^4 = 16i^4 = 16.$$

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля: фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 2. **Вычисление и преобразование степенных выражений**

Количество часов на выполнение - 2 часа

Цель работы: закрепить основные свойства степеней, отработать методы преобразования степенных выражений.

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов, тетрадь для практических работ.

Задание: решить задачи на вычисление и преобразование степенных выражений.

1. Данные выражения представить в виде степеней с одинаковыми показателями и сравнить их по величине:

- 1) 4^2 и 2^8 ; 4) 4^{300} и 3^{400} ; 6) $(-6/7)^4$ и $(36/49)^6$;
2) 27^3 и 9^6 ; 5) $-1/8$ и $(-1/32)^3$; 7) $(1/16)^{100}$ и $(1/2)^{500}$.
3) 125^2 и 25^3 ;

2. Данные выражения представить в виде степеней с одинаковыми основаниями и сравнить их по величине:

- 1) 8^5 и 16^3 ; 3) $(-3)^{75}$ и $(-27)^{15}$;
2) 4^{100} и 32^{50} ; 4) $81^{150} \cdot 8^{200}$ и $3^{600} \cdot 16^{75}$.

3. Вычислите

- а). $29 \cdot 16^{1/4} - 15$
б). $0,1 \cdot \sqrt{20} : \sqrt{45} - 2\frac{17}{30}$
в). $\frac{3 \cdot \sqrt[3]{\frac{8}{27}} + \sqrt{0,25}}{2,5}$

4. Упростите выражение

$$\sqrt[3]{32} : 2^{2/3} - \sqrt{121}$$

5. Выполните действия:

$$\frac{\sqrt[4]{y^3}}{(y^{1/3})^{9/2}}$$

6. Упростите выражение

$$\sqrt[4]{8a^3} \cdot \sqrt[4]{2a^5}$$

7. Упростите выражение

$$\sqrt[5]{\frac{n^4}{8m^3}} : \sqrt[5]{\frac{4m^2}{n}}$$

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.

3. Выполните задания.

Теоретический материал

Пусть дано положительное число a и произвольное действительное число n . Число a^n называется степенью, число a — основанием степени, число n — показателем степени.

По определению полагают:

$$a^1 = a.$$

$$a^0 = 1.$$

$$a^{-x} = \frac{1}{a^x}, x \in \mathbb{R}.$$

Если a и b — положительные числа, x и y — любые действительные числа, то справедливы следующие свойства:

- $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$.
- $a^x : a^y = a^{x-y}$.
- $(a^x)^y = a^{xy}$.
- $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$.
- $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$.
- $a^x > 0$.

При выполнении упражнений на вычисление, упрощение выражений, содержащих степени с рациональным показателем, используют определение и свойства степени.

Типовые задания

Пример 1. Вычислить: $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}}$.

Решение: $25^{\frac{1}{5}} \cdot 125^{\frac{1}{5}} = (25 \cdot 125)^{\frac{1}{5}} = (5^3)^{\frac{1}{5}} = 5$.

Ответ: 5.

Пример 2. Упростить выражения: $\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}}$.

Решение: $\frac{a^{\frac{4}{3}}b + ab^{\frac{4}{3}}}{\sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}} = \frac{ab \left(a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}} \right)}{a^{\frac{1}{3}} + b^{\frac{1}{3}}} = ab$.

Ответ: **ab**.

Пример 3. Упростить выражения: $\frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}}$.

Решение:

$$\frac{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{7}{3}}}{a^{\frac{1}{3}} - a^{\frac{4}{3}}} - \frac{a^{-\frac{1}{3}} - a^{\frac{5}{3}}}{a^{\frac{2}{3}} + a^{-\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{a^{\frac{1}{3}}(1 - a^2)}{a^{\frac{1}{3}}(1 - a)} - \frac{a^{-\frac{1}{3}}(1 - a^2)}{a^{-\frac{1}{3}}(1 + a)} =$$

$$= 1 + a - (1 - a) = 2a$$

Ответ: $2a$.

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля: фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 3.

Вычисление значений логарифмов и логарифмических выражений

Количество часов на выполнение - 2 часа

Цель работы: закрепить основные свойства логарифмов, отработать методы преобразования логарифмических выражений.

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов, тетрадь для практических работ.

Задание: решить задачи

1. Вычислить:

1) $\log_{16} 0,5$; 2) $\log_{64} \frac{1}{16}$; 3) $\log_{\frac{8}{27}} \frac{81}{16}$; 4) $\log_{\frac{1}{16}} \sqrt[3]{4}$; 5) $\log_4 8^7$;
 6) $100^{\lg \sqrt{5}}$; 7) $\frac{\lg 4}{\lg 64 - \lg 8}$; 8) $10^{2-3 \lg 5}$; 9) $49^{\frac{1}{2} + \log_7 2}$; 10) $36^{0,5 - \log_6 \sqrt{5}}$.

2. Прологарифмировать:

а) по основанию 10:

1) $\frac{a^5}{0,1c^2 \sqrt{b}}$; 2) $10^3 a^4 b^{\frac{1}{2}} c^{-3}$; 3) $\frac{0,01c^{\frac{2}{3}}}{a^{\frac{1}{2}} b^3}$;
 4) $100 \sqrt{ab^3 c}$; 5) $\frac{b^{\frac{2}{3}}}{10^5 a^6 c^5}$;

б) по основанию 3:

$$1) (\sqrt[5]{a^3b})^{\frac{2}{3}}; \quad 2) \frac{b^2}{27a^7}; \quad 3) a^{-3}b^4\sqrt{ab};$$

$$4) 27\sqrt{ab^3c}; \quad 5) \frac{b^{\frac{2}{3}}}{3^5a^6c^5}.$$

3. Найти x , если

$$1) \lg x = \lg 3 + \lg 5 - \lg 2;$$

$$2) \lg x = 2\lg 3 + 3\lg 2;$$

$$3) \lg x = \lg 7 - \lg 3 + \lg 2;$$

$$4) \lg x = \frac{1}{2}\lg 9 - \frac{2}{3}\lg 8;$$

$$5) \lg x = 5\lg 2 - \lg 2;$$

$$6) \lg x = 2 - \lg 5.$$

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести основание a , чтобы получить b .

Формулу $a^{\log_a b} = b$ называется основным логарифмическим тождеством.

Основные свойства логарифмов.

При любом $a > 0$, $a \neq 1$ и любых положительных x и y выполнены равенства:

$$1. \log_a 1 = 0. \quad 2. \log_a a = 1.$$

$$3. \log_a xy = \log_a x + \log_a y. \quad 4. \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y.$$

$$5. \log_a x^p = p \log_a x. \quad 6. \log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x.$$

Формула перехода от одного основания логарифма к другому основанию:

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}.$$

Типовые задания

Пример 1. Вычислить $\frac{1}{2}\log_3 36 + \log_3 2 - \log_3 \sqrt{6} - \frac{1}{2}\log_3 8$.

Решение:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \log_3 36 + \log_3 2 - \log_3 \sqrt{6} - \frac{1}{2} \log_3 8 &= \frac{1}{2} \log_3 36 + \log_3 2 - (\log_3 \sqrt{6} + \frac{1}{2} \log_3 8) = \\ &= \log_3 \frac{\sqrt{36} \cdot 2}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{8}} = \log_3 \frac{12}{\sqrt{48}} = \log_3 \frac{12}{4\sqrt{3}} = \log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить $49^{\log_7 2 - \frac{1}{2} \log_{49} 64}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение: } 49^{\log_7 2 - \frac{1}{2} \log_{49} 64} &= 49^{\log_7 2} \cdot 49^{-\frac{1}{2} \log_{49} 64} = 7^{2 \log_7 2} \cdot 49^{\log_{49} 64^{-\frac{1}{2}}} = \\ &= 7^{\log_7 2^2} \cdot 49^{\log_{49} (2^6)^{-\frac{1}{2}}} = 2^2 \cdot (2^6)^{-\frac{1}{2}} = 2^2 \cdot 2^{-3} = 2^{2-3} = 2^{-1} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Пример 3. Прологарифмировать по основанию 10 $10^{-4} \cdot a^2 b^5 c^{\frac{2}{3}}$.

$$\begin{aligned} \text{Решение: } \lg(10^{-4} \cdot a^2 b^5 c^{\frac{2}{3}}) &= \lg 10^{-4} + \lg a^2 + \lg b^5 + \lg c^{\frac{2}{3}} = \\ &= -4 \lg 10 + 2 \lg a + 5 \lg b + \frac{2}{3} \lg c. \end{aligned}$$

Пример 4. Найдите x , если $\log_5 x = \log_5 7 + 2 \log_5 5 - 3 \log_5 2$. Преобразуем правую часть данного равенства, пользуясь основными свойствами логарифмов: $\log_5 x = \log_5 7 + \log_5 3^2 - 3 \log_5 2 = \log_5 \frac{7 \cdot 9}{8} = \log_5 \frac{63}{8}$, то есть $\log_5 x = \log_5 \frac{63}{8}$ и поэтому $x = \frac{63}{8} = 7,875$.

Упражнения:

1. Вычислить:

$$1) 4^{\log_2 3 + 2 \log_{\frac{1}{16}} 4}; \quad 2) 25^{\log_5 3 - \log_{25} 27};$$

$$3) \log_5 (3\sqrt{3} + \sqrt{2}) + \log_5 (3\sqrt{3} - \sqrt{2});$$

$$4) 0,5 \log_5 (5\sqrt{2} + 1) + 0,5 \log_5 (5\sqrt{2} - 1); \quad 5) \frac{\lg 4}{\lg 16 - \lg 8};$$

$$6) \frac{\lg^2 7 - 1}{\lg 70}; \quad 7) \frac{\lg^2 3 - 1}{\lg 30}.$$

2. Прологарифмировать по основанию 10: 1) $\sqrt[3]{10a^{\frac{1}{3}}b^4c^{-\frac{1}{2}}}$; 2) $\frac{c^{\frac{7}{4}}}{10^7 a^{\frac{2}{3}} b^8}$.

3. Найти x , если

$$1) \log_6 x = 3 \log_6 2 + 0,5 \log_6 25 - 2 \log_6 25;$$

$$2) \lg x = 2 - 4 \lg a + \frac{1}{2} \lg b;$$

$$3) \lg x = 3 \lg a + 2 \lg b - 1.$$

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля: фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 4.

Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: систематизировать знания о измерении углов, закрепить методы измерения углов.

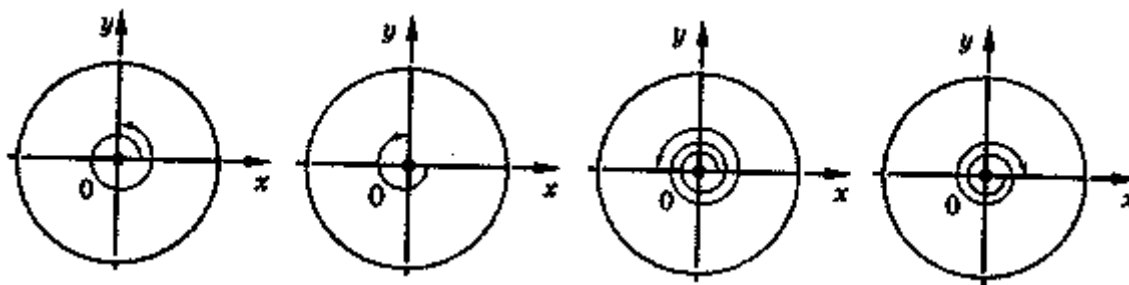
Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задание: решить задачи

1. Изобразите угол, образованный поворотом луча ОА около точки О на:

- | | |
|---------------------|---------------------|
| 1) 270° ; | 6) -45° ; |
| 2) -270° ; | 7) 540° ; |
| 3) 720° ; | 8) -180° ; |
| 4) -90° ; | 9) 360° ; |
| 5) 225° ; | 10) -60° . |

2. Чему равны углы поворота, показанные на рисунке



3. Выразите в радианной мере величины углов:

- 1) 225° ;
- 2) 36° ;
- 3) 100° ;
- 4) -240° ;
- 5) $-22,5^{\circ}$;
- 6) -150° .

4. Выразите в градусной мере величины углов:

- | | |
|------------------------|------------------------|
| 1) 3π ; | 5) $-\frac{\pi}{18}$; |
| 2) $\frac{3\pi}{4}$; | 6) $\frac{11\pi}{6}$; |
| 3) $-\frac{2\pi}{5}$; | 7) $-\frac{\pi}{8}$; |
| 4) $\frac{7\pi}{6}$; | 8) 3. |

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Определение угла.

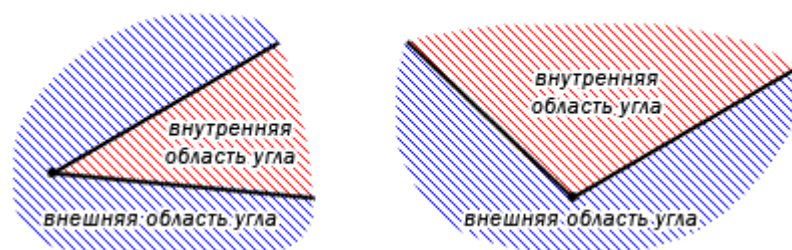
Определение.

Угол – это плоская геометрическая фигура (то есть целиком лежащая в некоторой плоскости), которую составляют два несовпадающих луча с общим началом. Каждый из лучей называют **стороной угла**, общее начало сторон угла называют **вершиной угла**.



Любой угол разделяет плоскость на две части. При этом если угол не развернутый, то одну часть плоскости называют **внутренней областью угла**, а другую – **внешней областью угла**. Следующее изображение разъясняет, какая часть плоскости отвечает внутренней области угла, а какая – внешней.

внутренняя и внешняя области угла

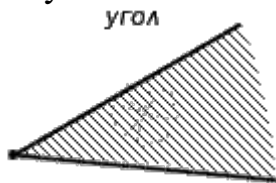


Любую из двух частей, на которые развернутый угол разделяет плоскость, можно считать внутренней областью развернутого угла.

Определение внутренней области угла приводит нас ко второму определению угла.

Определение.

Угол – это геометрическая фигура, которую составляют два несовпадающих луча с общим началом и соответствующая внутренняя область угла.



Измерение углов.

Измерение углов основывается на сравнении измеряемого угла с углом, взятым в качестве единицы измерения. Процесс измерения углов выглядит так: начиная от одной из сторон измеряемого угла, его внутреннюю область последовательно заполняют единичными углами, плотно укладывая их один к другому. При этом запоминают количество уложенных углов, которое и дает меру измеряемого угла.

Фактически, в качестве единицы измерения углов может быть принят любой угол. Однако существует множество общепринятых единиц измерения углов, относящихся к различным областям науки и техники, они получили специальные названия.

Одной из единиц измерения углов является **градус**.

Определение.

Один градус – это угол, равный одной сто восьмидесятой части развернутого угла.

Градус обозначают символом «°», следовательно, один градус обозначается как 1° .

Таким образом, в развернутом угле мы можем уложить **180** углов в один градус. Это будет выглядеть как половинка круглого пирога, разрезанная на **180** равных кусочков. Очень важно: «кусочки пирога» плотно укладываются один к другому (то есть, стороны углов совмещаются), причем сторона первого угла совмещается с одной стороной развернутого угла, а сторона последнего единичного угла совпадет с другой стороной развернутого угла.

При измерении углов выясняют, сколько раз градус (или другая единица измерения углов) укладывается в измеряемом угле до полного покрытия внутренней области измеряемого угла. Как мы уже убедились, в развернутом угле градус укладывается ровно **180** раз. Ниже приведены примеры углов, в которых угол в один градус укладывается ровно **30** раз (такой угол составляет шестую часть развернутого угла) и ровно **90** раз (половина развернутого угла).



Для измерения углов, меньших одного градуса (или другой единицы измерения углов) и в случаях, когда угол не удастся измерить целым числом градусов (взятых единиц измерения), приходится использовать части градуса (части взятых единиц измерения). Определенные части градуса получили специальные названия. Наибольшее распространение получили, так называемые, минуты и секунды.

Определение.

Минута – это одна шестидесятая часть градуса.

Определение.

Секунда – это одна шестидесятая часть минуты.

Иными словами, в минуте содержится шестьдесят секунд, а в градусе – шестьдесят минут (**3600** секунд). Для обозначения минут используют символ «'», а для обозначения секунд – символ «''» (не путайте со знаками производной и второй производной). Тогда при введенных определениях и обозначениях

$$1^\circ = 60' = 3600'', \quad 1' = \left(\frac{1}{60}\right)^\circ, \quad 1'' = \left(\frac{1}{60}\right)' = \left(\frac{1}{3600}\right)^\circ$$

имеем, а угол, в котором укладываются **17** градусов **3** минуты и **59** секунд, можно обозначить как **17°3'59''**.

Определение.

Градусной мерой угла называется положительное число, которое показывает сколько раз градус и его части укладываются в данном угле.

Например, градусная мера развернутого угла равна ста восьмидесяти, а

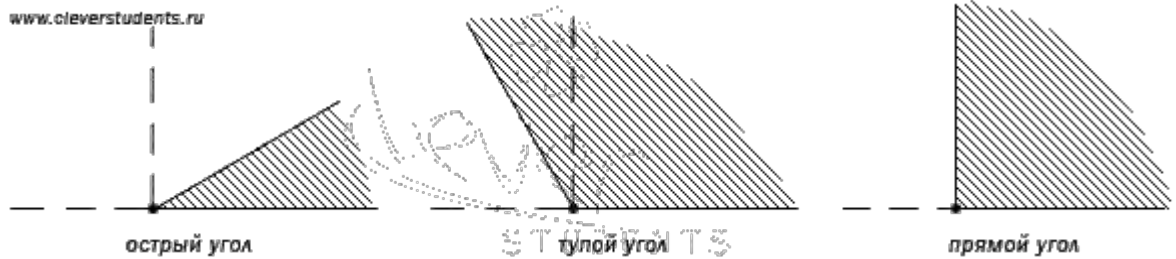
градусная мера угла **17°3'59''** равна $17 + \frac{3}{60} + \frac{59}{3600} = 17 \frac{239}{3600}$.

Для измерения углов существуют специальные измерительные приборы, наиболее известным из них является транспортир.

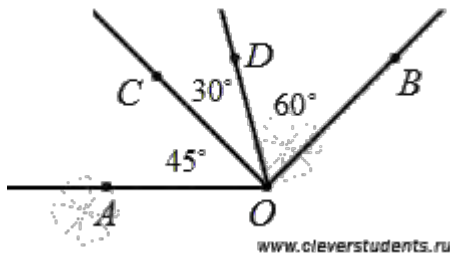
Если известно и обозначение угла (к примеру, $\angle AOB$) и его градусная мера (пусть **110**), то используют краткую запись вида $\angle AOB = 110^\circ$ и говорят: «Угол AOB равен ста десяти градусам».

Из определений угла и градусной меры угла следует, что в геометрии мера угла в градусах выражается действительным числом из интервала **(0, 180]** (в тригонометрии рассматривают углы с произвольной градусной мерой, их называют углами поворота). Угол в девяносто градусов

имеет специальное название, его называют **прямым углом**. Угол меньший **90** градусов называется **острым углом**. Угол больший девяноста градусов называется **тупым углом**. Итак, мера острого угла в градусах выражается числом из интервала **(0, 90)**, мера тупого угла – числом из интервала **(90, 180)**, прямой угол равен девяноста градусам. Приведем иллюстрации острого угла, тупого угла и прямого угла.



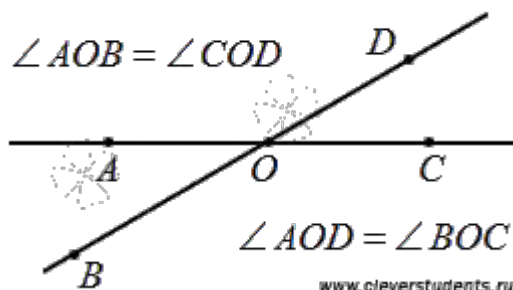
Из принципа измерения углов следует, что градусные меры равных углов одинаковы, градусная мера большего угла больше градусной меры меньшего, а градусная мера угла, который составляют несколько углов, равна сумме градусных мер составляющих углов. На рисунке ниже показан угол AOB , который составляют углы AOC , COD и DOB , при этом $\angle AOB = \angle AOC + \angle COD + \angle DOB = 45^\circ + 30^\circ + 60^\circ = 135^\circ$.



Таким образом, **сумма смежных углов равна ста восьмидесяти градусам**, так как они составляют развернутый угол.

Из этого утверждения следует, что **вертикальные углы равны**. Действительно, если углы AOB и COD – вертикальные, то углы AOB и BOC – смежные и углы COD и BOC также смежные, поэтому, справедливы равенства $\angle AOB + \angle BOC = 180^\circ$ и $\angle COD + \angle BOC = 180^\circ$, откуда следует равенство $\angle AOB = \angle COD$.

вертикальные углы равны

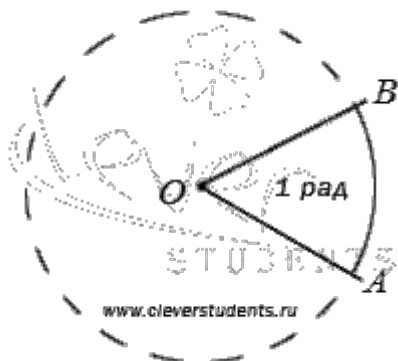


Наряду с градусами удобна единица измерения углов, называемая **радианом**. Радианная мера в основном используется в тригонометрии. Дадим определение радиана.

Определение.

Один радиан – это величина *центрального* угла, которому соответствует длина дуги, равная длине радиуса соответствующей окружности.

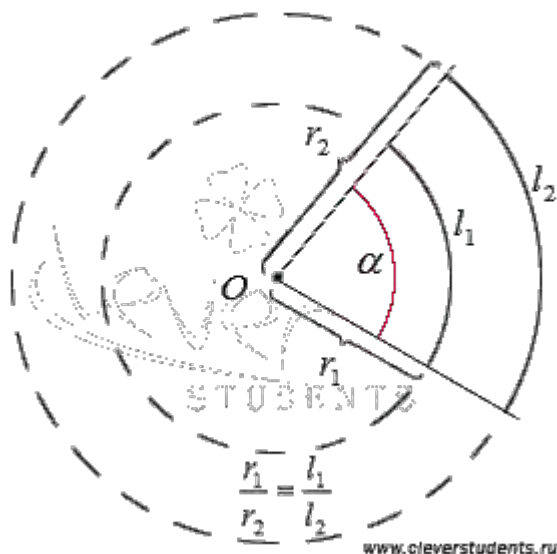
Дадим графическую иллюстрацию угла в один радиан. На чертеже длина радиуса **OA** (как и радиуса **OB**) равна длине дуги **AB**, поэтому, по определению угол **AOB** равен одному радиану.



Для обозначения радиан используют сокращение «рад». Например, запись **5 рад** означает **5 радиан**. Однако, отношение длины дуги к длине радиуса представляет собой величину, не имеющую размерности

(например, $\frac{6 \text{ см}}{2 \text{ см}} = 3$, размерности см в числителе и знаменателе сокращаются), поэтому, при обозначении величин углов, выраженных в радианах, «рад» часто не пишут. К примеру, когда написано, что угол равен π , то имеется в виду π радиан.

Стоит отдельно отметить, что величина угла, выраженная в радианах, не зависит от длины радиуса окружности. Это связано с тем, что фигуры, ограниченные данным углом и дугой окружности с центром в вершине данного угла, подобны между собой.



Измерение углов в радианах можно выполнять так же, как и измерение углов в градусах: выяснить, сколько раз угол в один радиан (и его части) укладываются в данном угле. А можно вычислить длину дуги

соответствующего центрального угла, после чего разделить ее на длину радиуса.

На практике полезно знать, как соотносятся между собой градусная и радианная меры, а также полезно выполнять перевод градусов в радианы и радиан в градусы. В указанной статье установлена связь между градусами и радианами и показаны решения примеров перевода радианной меры в градусную и обратно.

Обозначение углов на чертеже.

На чертежах для удобства и наглядности углы можно отмечать дугами, которые принято проводить во внутренней области угла от одной стороны угла до другой. Равные углы отмечают одинаковым количеством дуг, неравные углы – различным количеством дуг. Прямые углы на чертеже обозначают символом вида « Γ », который изображают во внутренней области прямого угла от одной стороны угла до другой.



Если на чертеже приходится отмечать много различных углов (обычно больше трех), то при обозначении углов кроме обычных дуг допустимо использование дуг какого-либо специального вида. К примеру, можно изобразить зубчатые дуги, или нечто подобное.



Следует отметить, что не стоит увлекаться с обозначением углов на чертежах и не загромождать рисунки. Рекомендуем обозначать только те углы, которые необходимы в процессе решения или доказательства.

Типовые задания

1. Выразите в радианах величины углов: 30^0 ; 45^0 ; 60^0 ; 90^0 ; 270^0 ; 360^0 .

Решение: Поскольку 30^0 – это $\frac{1}{6}$ часть угла 180^0 , то из равенства

$$180^0 = \pi \text{ (рад)} \text{ получаем, что } 30^0 = \frac{\pi}{6} \text{ (рад)}.$$

В общем случае учитываем, что $1^0 = \frac{\pi}{180}$ радиан, тогда:

$$45^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 45 = \frac{\pi}{4} \text{ (рад)};$$

$$60^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 60 = \frac{\pi}{3} \text{ (рад)};$$

$$90^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 90 = \frac{\pi}{2} \text{ (рад)};$$

$$270^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 270 = \frac{3\pi}{2} \text{ (рад)};$$

$$360^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 360 = 2\pi \text{ (рад)};$$

2. Выразите в градусах величины углов: $\frac{\pi}{10}$; $\frac{2\pi}{3}$; $\frac{3\pi}{4}$; 5.

Решение: Поскольку $\frac{\pi}{10}$ – это $\frac{1}{10}$ часть угла π , то из

равенства $\pi = 180^0$ получаем, что $\frac{\pi}{10} = 18^0$.

В общем случае учитываем, что $1 \text{ радиан} = \frac{180^0}{\pi}$, тогда:

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{3} = 120^0;$$

$$\frac{3\pi}{4} = \frac{180^0}{\pi} \cdot \frac{3\pi}{4} = 135^0;$$

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 5. Преобразование тригонометрических выражений

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: отработать определения и основные свойства тригонометрических функций, методы преобразования логарифмических выражений с помощью основных формул тригонометрии.

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задание: решить задачи

1. Вычислить значения остальных тригонометрических функций угла α , если: 1) $\sin \alpha = -0,6$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 2) $\sin \alpha = \frac{12}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

3) $\cos \alpha = -\frac{9}{41}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; 4) $\cos \alpha = \frac{15}{17}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

5) $\cos \alpha = -\frac{12}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 6) $\text{ctg} \alpha = -\frac{8}{15}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$;

7) $\text{tg} \alpha = \frac{8}{15}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; 8) $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

9) $\cos \alpha = \frac{2}{3}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 10) $\sin \alpha = -0,3$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$.

2. Определить знак выражения:

1) $\frac{\sin 205^\circ \cos 275^\circ}{\text{tg} 200^\circ \text{ctg} 105^\circ}$; 2) $\frac{\sin 175^\circ \cos 300^\circ}{\text{tg} 297^\circ \text{ctg} 135^\circ}$; 3) $\frac{\sin 310^\circ \cos 170^\circ}{\text{tg} 190^\circ \text{ctg} 92^\circ}$;

4) $\frac{\sin 235^\circ \text{ctg} 215^\circ}{\text{tg} 95^\circ \cos 265^\circ}$; 5) $\frac{\cos 75^\circ \sin 95^\circ \text{tg} 305^\circ}{\text{ctg} 293^\circ \cos 269^\circ}$.

3. Упростить выражения:

1) $\frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} \text{tg} \alpha \cdot \text{ctg} \beta + 1$; 2) $(\sin \alpha + \cos \alpha) \div (\frac{1}{\sin \alpha} + \frac{1}{\cos \alpha})$;

3) $\sin^2 \alpha \div (\frac{1}{\cos^2 \alpha} - 1) + \cos^2 \alpha \div (\frac{1}{\sin^2 \alpha} - 1)$; 4) $(\frac{\sin \alpha}{\text{tg} \alpha})^2 + (\frac{\cos \alpha}{\text{ctg} \alpha})^2 - \sin^2 \alpha$;

5) $\frac{\sin(\alpha - \pi) + \cos(\alpha - \frac{3\pi}{2})}{\text{ctg}(\alpha - \frac{\pi}{2}) - \text{tg}(\pi + \alpha)}$; 6) $\frac{\cos(\alpha - \pi) \cdot \text{ctg}(\alpha + \frac{\pi}{2}) \cdot \sin(4\pi - \alpha)}{\sin(7\pi + \alpha) \cdot \text{ctg}(\frac{3\pi}{2} - \alpha)}$;

7) $\frac{1 - \cos(\frac{3\pi}{2} - \beta) + \cos(6\pi - \beta)}{1 + \sin(8\pi + \beta) - \sin(\frac{3\pi}{2} + \beta)}$.

Методика выполнения задания:

4. Изучите теоретический материал по данной теме.
5. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
6. Выполните задания.

Теоретический материал

Рассмотрим единичную окружность, то есть окружность с центром O и радиусом, равным 1. На единичной окружности отметим точку $P_0(1;0)$. При повороте начального радиуса около центра O на угол α радиан точка $P_0(1;0)$ перейдет в некоторую точку $P_\alpha(x_\alpha; y_\alpha)$.

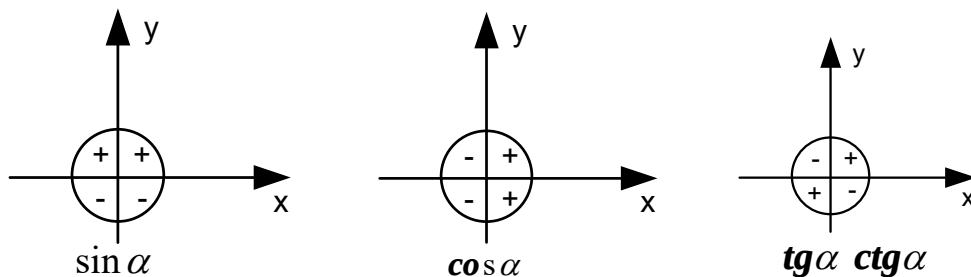
Синусом угла α называется отношение ординаты точки к радиусу окружности, то есть $\sin \alpha = \frac{y_\alpha}{R}$.

Косинусом угла α называется отношение абсциссы точки к радиусу окружности, то есть $\cos \alpha = \frac{x_\alpha}{R}$.

Тангенсом угла α называется отношение ординаты точки к ее абсциссе, то есть $\operatorname{tg} \alpha = \frac{y_\alpha}{x_\alpha}$.

Котангенсом угла α называется отношение абсциссы точки к ее ординате, то есть $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{x_\alpha}{y_\alpha}$.

Знаки значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса



Основные тригонометрические тождества

1. $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$.
2. $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \cos \alpha \neq 0$.
3. $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \sin \alpha \neq 0$.
4. $\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$.
5. $\operatorname{tg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$.
6. $\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$.

Формулы сложения двух аргументов тригонометрических функций

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Формулы суммы и разности синусов и косинусов

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}$$

Формулы двойного аргумента

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Формулами приведения называются соотношения, с помощью которых значения тригонометрических функций аргументов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\pi \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$, выражаются через значения $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$.

Для запоминания этих формул удобно пользоваться следующим правилом:

1) при переходе от функций углов $\frac{\pi}{2} \pm \alpha$, $\frac{3\pi}{2} \pm \alpha$ к функции угла α название функции изменяется: синус на косинус, тангенс на котангенс и наоборот;

при переходе от функций углов $\pi \pm \alpha$, $2\pi \pm \alpha$ к функции угла α название функции не изменяется.

2) считая α острым углом ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) перед функцией угла α ставят знак, какой имеет приводимая функция.

Типовые задания

Пример 1. Вычислить значение $\cos \alpha$, если $\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение: из основного тригонометрического тождества

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1, \quad \cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \quad \cos \alpha = -\sqrt{1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2} = -\frac{4}{5} \quad (\text{перед}$$

радикалом стоит знак «минус», так как во II четверти $\cos \alpha < 0$).

Пример 2. Определить знак выражения

$$\cos 365^\circ \sin 67^\circ \cos 267^\circ \sin(-68^\circ) \cos(-68^\circ).$$

Решение: $\cos 365^\circ > 0$ так как 365° – угол I четверти, в которой $\cos \alpha$ положителен, аналогично $\sin 67^\circ > 0$ (I четверть), $\cos 267^\circ < 0$ (III четверть), $\sin(-68^\circ) < 0$ (IV четверть), $\cos(-68^\circ) > 0$ (IV четверть).

Пример 3. Упростить выражение $\frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)}$.

Решение: используя формулы приведения, получим

$$\frac{\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) \cos(180^\circ - \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ - \alpha)}{\sin(90^\circ + \alpha) \operatorname{ctg}(90^\circ + \alpha) \operatorname{tg}(90^\circ + \alpha)} = \frac{(-\operatorname{tg} \alpha)(-\cos \alpha) \operatorname{ctg} \alpha}{\cos \alpha (-\operatorname{tg} \alpha)(-\operatorname{ctg} \alpha)} = 1.$$

Пример 4. Упростить выражение $\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \operatorname{tg} \alpha$.

Решение: используя основные тригонометрические тождества, получим

$$\frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \operatorname{tg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{1 + \sin \alpha} + \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\cos^2 \alpha + \sin \alpha + \sin^2 \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \frac{1 + \sin \alpha}{(1 + \sin \alpha) \cos \alpha} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

Упражнения

1. Вычислить значения остальных тригонометрических функций угла

$$\alpha, \text{ если: 1) } \operatorname{tg} \alpha = -\frac{4}{3}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi; \text{ 2) } \cos \alpha = -\frac{8}{17}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi;$$

$$\text{3) } \operatorname{ctg} \alpha = -\frac{7}{24}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi; \text{ 4) } \sin \alpha = -\frac{15}{13}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi;$$

2. Определить знак выражения: 1) $\sin 210^\circ \sin 465^\circ \cos 465^\circ \cos 540^\circ$;

$$\text{2) } \sin 50^\circ \sin 188^\circ \cos 60^\circ \cos 189^\circ; \text{ 3) } \sin 110^\circ \cos 100^\circ \operatorname{tg} 230^\circ \operatorname{ctg} 230^\circ.$$

3. Упростить выражения:

$$\text{1) } 1 - \sin^2 \alpha + \operatorname{ctg}^2 \alpha \cdot \sin^2 \alpha; \quad \text{2) } \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \div \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \sin \alpha};$$

$$\text{3) } \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \sin \beta} \operatorname{ctg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \beta + 1; \quad \text{4) } \sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) \cdot \cos(\pi - \alpha) + \sin(\alpha - \pi) \cdot \sin(\pi + \alpha);$$

$$\text{5) } \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(12\pi - \alpha) \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \beta\right)}{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) + \sin(3\pi - \alpha) \sin(4\pi + \beta)}.$$

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 6.

Свойства функции

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: закрепление знаний и умений работы с функциями

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задание: решить задачи

1. Найти область определения функции **D(y)**

1. $y = \frac{7}{\sqrt[6]{x} - 2}$

2. $y = \frac{25}{3 - \sqrt[4]{x}}$

3. $y = \frac{12}{\sqrt[4]{x} - 2}$

4. $y = \sqrt[6]{x^2 - 25}$

5. $y = \sqrt[12]{16 - x^2}$

6. $y = \frac{x - 3}{x^2 - 9}$

7. $y = \sqrt{6x - x^2 - 8}$

8. $y = \sqrt{4 - x}$

9. $y = \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 4}$

10. $y = \frac{x - 7}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$

11. $y = \sqrt{\frac{x + 7}{x}}$

12. $y = \frac{x + 7}{\sqrt{x}}$

13. $y = \frac{\sqrt{x + 7}}{x}$

14. $y = \frac{x + 7}{x}$

15. $y = x^5 + 3x^4 - 8x^3 + x^2$

16. $y = \sqrt{2x - 4}$

17. $y = \sqrt{x} + \sqrt{x - 1}$

18. $y = \frac{x - 1}{x^2 - 9x + 20}$

19. $y = \frac{4x - 1}{3x^2 - 5x - 2}$

20. $y = \frac{x^2 - 4}{x + 2}$

21. $y = x^3 + 1$

22. $y = \frac{1}{1 - x^2}$

23. $y = \frac{1}{4x - 2}$

24. $y = \sqrt{7 - x} + \frac{1}{x - 1}$

2. Найти множество значений функции **E(y)**:

25. $y = 4x + 1$

26. $y = \frac{2}{x}$

27. $y = |x - 1|$

28. $y = x^2 + 3$

29. $y = x^3 + 2$

3. Исследовать функцию на четность/нечетность:

$$30. y = (x^4 + 3)\sqrt{x^4 - 3}$$

$$31. y = x^3(3x + x^5)^3$$

$$32. y = 2^x$$

$$33. y = \frac{x^4}{x^2 + 3}$$

$$34. y = 3^x - 3^{-x}$$

4. Найти нули функции:

$$35. y = -2x^2 + 5x$$

$$36. y = x^2 - 2x + 1$$

$$37. y = x^2 - 6x + 8$$

$$38. y = \sqrt{x^2 + 9}$$

$$39. y = x^3 - 11x^2 + 12x$$

5. Исследовать функцию на монотонность:

$$40. y = 2x + 5$$

$$41. y = \frac{2}{x^2 + 1}$$

$$42. y = x^2 + 4x - 2$$

$$43. y = |x - 2|$$

$$44. y = (x + 5)^3$$

Методика выполнения задания

Если разным значениям переменной x соответствуют некоторые значения переменной y , то говорят, что задана *функциональная зависимость* между x и y , при этом x – независимая переменная, а y – зависимая переменная, или *функция*.

Теоретический материал

Правила нахождения области определения

Для примера рассмотрим функцию типа $y = 2 \cdot x + 1$. Для вычисления ее значения можем определить x . Из выражения $2 \cdot x + 1$ видно, что функция определена на множестве всех действительных чисел. Рассмотрим еще один пример для подробного определения. Если задана функция типа $y = \frac{3}{x-1}$, а необходимо найти область определения, тогда понятно, что следует обратить внимание на знаменатель. Известно, что на ноль делить нельзя. Отсюда получаем, что $x - 1$ знаменатель равняется нулю при $x = 1$, поэтому искомая область определения данной функции примет вид $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ и

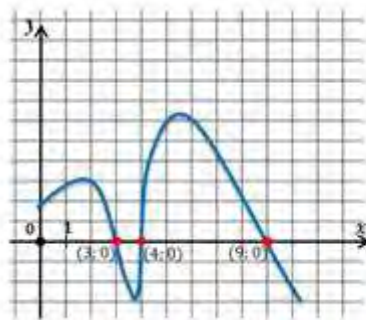
считается числовым множеством. На рассмотрении примера $y = \sqrt{x^2 + 5x + 6}$ видно, что имеется подкорненное выражение, которое всегда больше или равно нулю. Значит запись примет вид $x^2 + 5x + 6 \geq 0$. После решения неравенства получим, что имеются две точки, которые делят область определения на отрезки, которые записываются как $(-\infty, -2] \cup [3, +\infty)$ $(-\infty, 2] \cup [3, +\infty)$.

Существуют следующие свойства функции:

- нули функции;
- промежутки знакопостоянства функции;
- промежутки монотонности функции.

Нули функции

Определение: Нулями функции называют такие значения аргумента, при которых функция равна нулю.



$$\begin{aligned} y = 0 \text{ при } x = 3, \\ x = 4, \\ x = 9. \end{aligned}$$

В данном случае функция задана графически и мы определили нули функции по графику. Так же нули функции можно находить по формуле, с помощью которой задана функция.

$$\begin{aligned} y &= (2x - 4)(x + 5), \\ y = 0: \quad (2x - 4)(x + 5) &= 0, \\ 2x - 4 &= 0, \quad x + 5 = 0, \\ 2x &= 4, \quad x &= -5, \\ x &= 2, \\ y = 0 \text{ при } x = 2 \text{ и } x &= -5, \\ \text{Ответ: } 2; -5. \end{aligned}$$

Решив уравнение, мы найдём те значения x , при которых функция равна нулю.

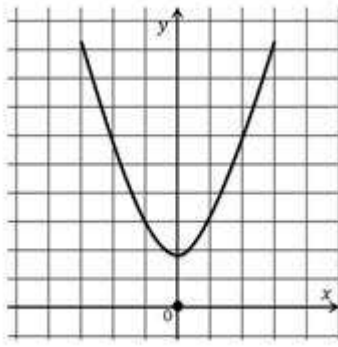
Стоит обратить внимание на то, что не каждая функция имеет нули.

$$y = x^2 + 6$$

$$x^2 \geq 0$$

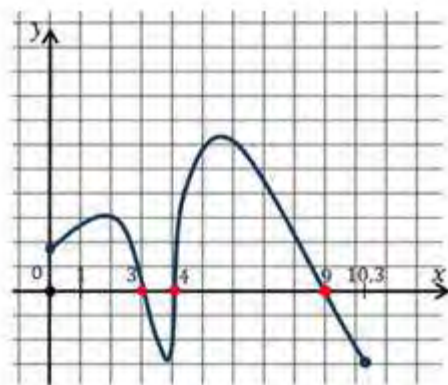
$$x^2 + 6 > 0$$

График не пересекает ось x ни в одной точке.



Промежутки знакопостоянства функции

Определение: **Промежутки знакопостоянства функции** - это такие промежутки из области определения, на которых данная функция принимает значения только одного знака, либо положительные, либо отрицательные.



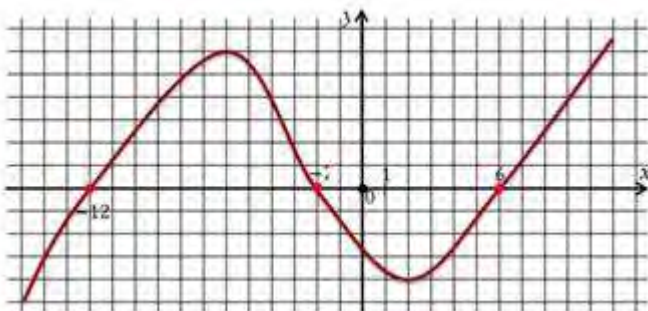
Функция принимает положительные значения:

$$y > 0 \text{ при } x \in [0; 3) \cup (4; 9),$$

И отрицательные значения:

$$y < 0 \text{ при } x \in (3; 4) \cup (9; 10,3].$$

Запишите промежутки знакопостоянства функции:



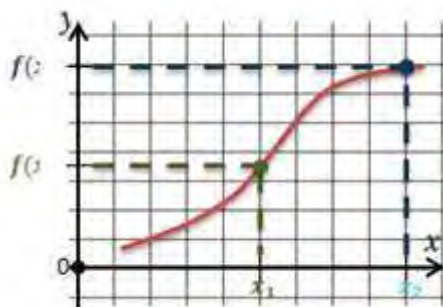
Положительные и отрицательные значения функции:

$$y > 0 \text{ при } x \in (-12; -2) \cup (6; +\infty),$$

$$y < 0 \text{ при } x \in (-\infty; -12) \cup (-2; 6).$$

Промежутки монотонности функции

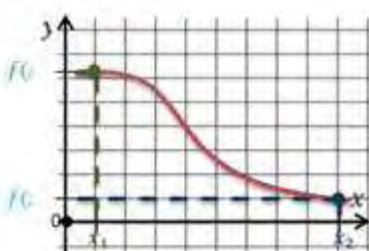
Определение: Функция называется **возрастающей** в некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции.



Если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$

Определение:

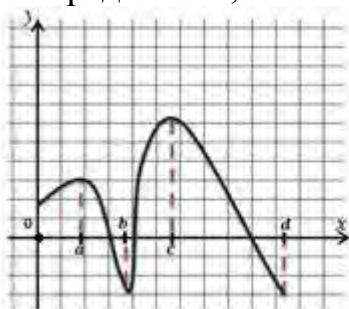
Функция называется **убывающей** в некотором промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует меньшее значение функции.



Если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$

Определение:

Промежутками монотонности называют такие промежутки из области определения, на которых функция либо возрастает, либо убывает.



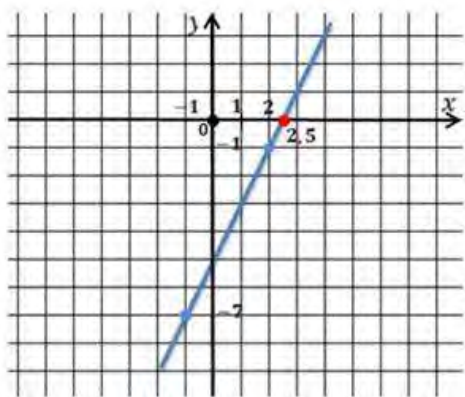
$y \nearrow$ при $x \in [0; a] \cup [b; c]$

$y \searrow$ при $x \in [a; b] \cup [c; d]$

Опишем свойства функции:

$$y = 2x - 5$$

Графиком является прямая, поэтому для построения достаточно двух точек:



Найдём значения функции:

$$y(2) = 2 \cdot 2 - 5 = -1 \quad (2; -1)$$

$$y(-1) = 2 \cdot (-1) - 5 = -2 - 5 = -7 \quad (-1; -7)$$

Областью определения и областью значений будет множество всех действительных чисел. Ведь x и y могут быть любыми числами.

$$D(y) = (-\infty; +\infty).$$

$$E(y) = (-\infty; +\infty).$$

Найдём нули функции:

$$\begin{aligned} y = 0: \quad 2x - 5 &= 0, \\ 2x &= 5, \\ x &= 2,5. \end{aligned}$$

Запишем промежутки знакопостоянства:

$$\begin{aligned} y &> 0 \text{ при } x \in (2,5; +\infty), \\ y &< 0 \text{ при } x \in (-\infty; 2,5). \end{aligned}$$

Запишем промежутки монотонности:

$$y \nearrow \text{ при } x \in (-\infty; +\infty).$$

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа №7. Построение графиков функций с помощью элементарных преобразований

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: отработать навыки построения графиков известных функций с помощью элементарных преобразований (параллельного переноса, сжатия или растяжения).

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задание: решить задачи

1) $y = 2(x-1)^2$; 2) $y = 2(x+1)^2$; 3) $y = \sqrt{x-1} + 3$; 4) $y = \sqrt{x+1} - 2$;
5) $y = \frac{1}{x+2} + 2$; 6) $y = \frac{1}{2}\sqrt{x} - 1$; 7) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$; 8) $y = \frac{2}{x+1}$;
9) $y = \frac{3}{x} - 1$.

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Если известен график функции $y = f(x)$, то с помощью некоторых преобразований плоскости (параллельного переноса, осевой и центральной симметрии и т.п.) можно построить графики более сложных функций.

1. График функции $y = f(x+c)$ получается параллельным переносом графика $f(x)$ в отрицательном направлении оси Ox на $|c|$ при $c > 0$ и в положительном направлении на $|c|$ при $c < 0$ (рис. 8.1).

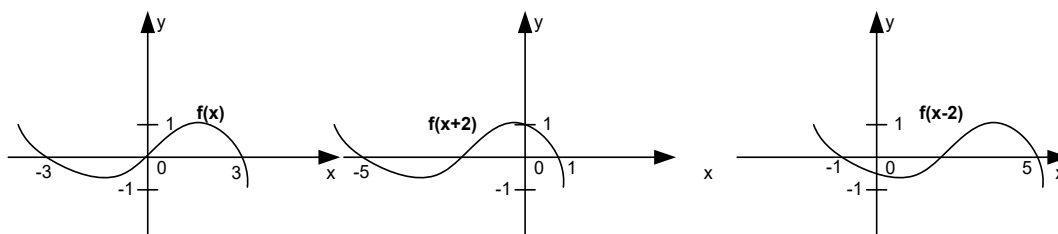


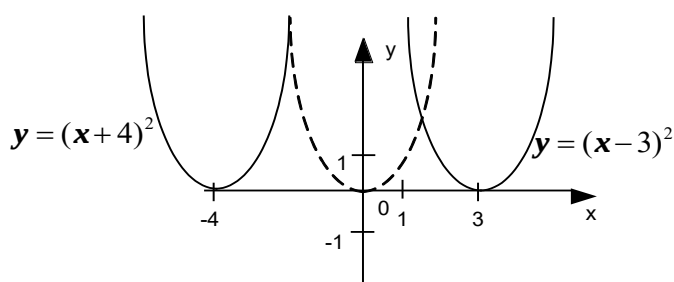
Рис. 8.1

Пример 1. Построить графики функций $y = (x-3)^2$ и $y = (x+4)^2$.

Решение: 1) Построим график функции $y = x^2$ (пунктирная линия на рисунке 8.2).

2) Выполним параллельный перенос графика функции $y = x^2$ вправо (в положительном направлении) на 3 единицы. Получим график функции $y = (x-3)^2$ (рис. 8.2).

3) Выполним параллельный перенос графика функции $y = x^2$ влево (в отрицательном направлении) на 4 единицы.



Получим график функции $y = (x+4)^2$ (рис. 8.2)

2. График функции $af(x)$ получается растяжением графика $f(x)$ вдоль оси Oy в a раз при $a > 1$ и сжатием вдоль этой

оси в $\frac{1}{a}$ раз при $0 < a < 1$ (рис. 8.3).

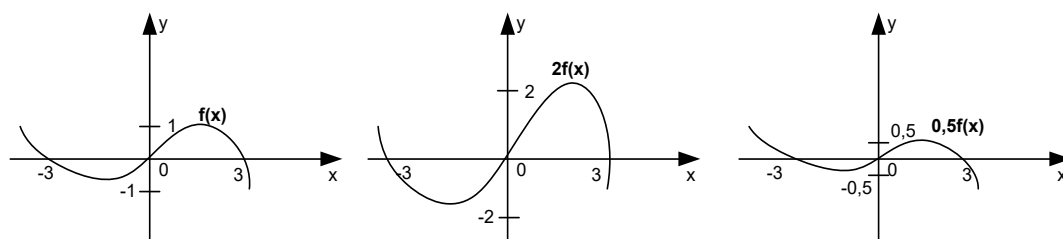


Рис. 8.3

Пример 2. Построить график функции $y = -2\sqrt{x}$.

Решение: 1) Построим график функции $y = \sqrt{x}$ (пунктирная линия на рисунке 8.4).

2) Выполним растяжение построенного графика от оси x с коэффициентом 2. Получим график функции $y = 2\sqrt{x}$ (рис. 8.4).

3) Отобразим построенный график симметрично относительно оси x (рис. 8.4)

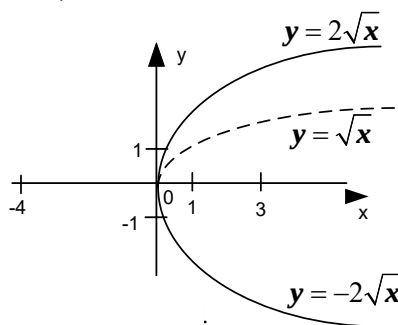


Рис. 8.4

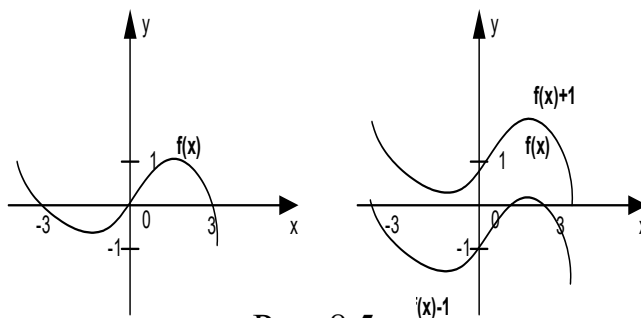


Рис. 8.5

3. График функции $f(x)+k$ получается параллельным переносом графика $f(x)$ в положительном направлении оси Oy на k при $k > 0$ и в отрицательном направлении этой оси на $|k|$ при $k < 0$ (рис. 8.5).

Пример 3. Построить график функции $y = \frac{1}{x} + 1$.

Решение: 1) Построим график функции $y = \frac{1}{x}$ (пунктирная линия на рисунке 8.6).

2) Выполним параллельный перенос графика функции $y = \frac{1}{x}$ вверх (в положительном направлении оси Oy) на 1 единицу. Получим график функции $y = \frac{1}{x} + 1$ (рис. 8.6).

Пример 4. Построить график функции $y = (x + 2)^2 + 1$.

Решение: 1) Построим график функции $y = x^2$ (пунктирная линия на рисунке 8.7).

2) Выполним параллельный перенос графика функции $y = x^2$ влево (в отрицательном направлении) на 2 единицы. Получим график функции $y = (x + 2)^2$. (рис. 8.7)

3) Выполним параллельный перенос графика функции $y = (x + 2)^2$ вверх (в положительном направлении оси Oy) на 1 единицу. Получим график функции $y = (x + 2)^2 + 1$ (рис. 8.7)

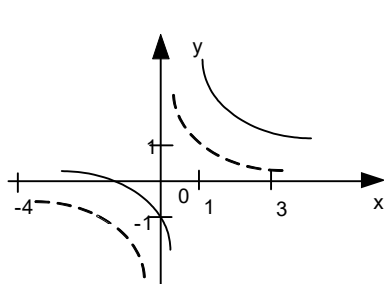


Рис. 8.6

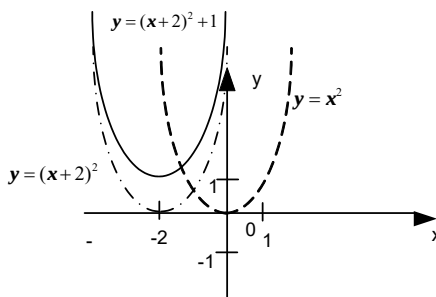


Рис. 8.7

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 8. Действия над векторами

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: отработать основные действия над векторами, понятие скалярного произведения.

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задание: решить задачи

1. Доказать, что векторы $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ и $\vec{b} = 5\vec{i} - 3\vec{j} + 3\vec{k}$ взаимно перпендикулярны.

2. Вычислить длину вектора $\vec{a} = (2\vec{m} - 3\vec{n}) - (\vec{m} + \vec{n})$, если даны координаты векторов $\vec{m} = (2; 3; 1)$, $\vec{n} = (0; 1; 1)$.

3. Вычислить скалярное произведение $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{a}$, если $\vec{a} = (1; 0; 3)$, $\vec{b} = (2; -1; 1)$.

4. Вычислить длину вектора $(\vec{a} - 2\vec{b}) - (3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b})$, если даны координаты векторов $\vec{a} = (0; 1; 2)$, $\vec{b} = (2; 4; 6)$.

5. Вычислить скалярное произведение $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{a})$, если даны координаты векторов $\vec{a} = (3; 4; 0)$, $\vec{b} = (1; 0; 4)$.

6. Найти третью координату вектора, если даны его координаты $x = -4$, $z = 3$ и длина вектора равна 13.

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Вектором называется направленный отрезок. Вектор, заданный парой (A, B) несовпадающих точек обозначается символом $\overrightarrow{AB}$. Точка A называется началом, а точка B - концом вектора.

Расстояние $|\overrightarrow{AB}|$ называется длиной (модулем) вектора $\overrightarrow{AB}$.

Для обозначения векторов употребляются такие строчные математические буквы со стрелкой наверху: $\vec{a}, \vec{b}, \dots, \vec{x}, \vec{y}$.

Вектор $\overrightarrow{AA}$, концы которого совпадают, называется нулевым вектором.

Длина нулевого вектора равна нулю. Понятие направления для нулевого вектора не вводится.

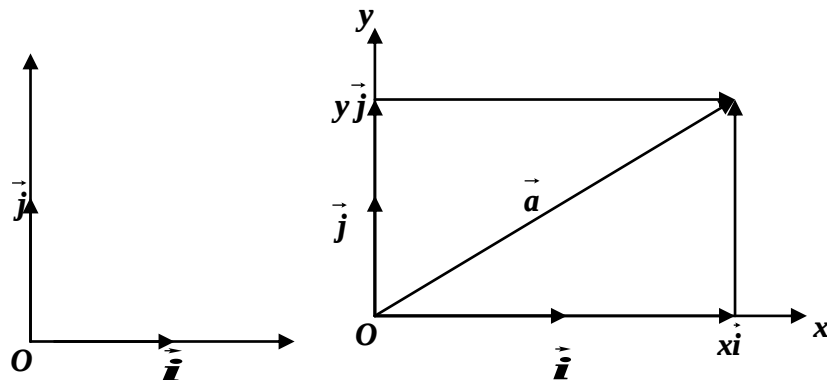
Коллинеарные векторы. Два вектора называют коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Если два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то они могут быть направлены либо одинаково, либо противоположно. В первом случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются сонаправленными ($\vec{a} \uparrow \vec{b}$), во втором - противоположно направленными ($\vec{a} \updownarrow \vec{b}$).

Равенство векторов. Два вектора называются равными, если они совмещаются параллельным переносом, т.е. если существует параллельный перенос, который переводит начало и конец одного вектора соответственно в начало и конец другого вектора.

Прямоугольная система координат.

Пусть на плоскости задана пара единичных взаимно перпендикулярных векторов $\vec{i}$ и $\vec{j}$, отложенных от некоторого начала- точки O .



Такую пару векторов называют прямоугольным базисом на плоскости. Совокупность начала O и прямоугольного базиса $(\vec{i}, \vec{j})$ называют прямоугольной системой координат на плоскости. Точку O называют началом координат, а векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ - координатными векторами.

Разложение вектора по координатным осям.

Разложение вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$ имеет вид $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$;

где $\vec{i}$ - единичный вектор на оси Ox , $\vec{j}$ - единичный вектор на оси Oy .

Числа x и y называются координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$.

Векторы $x\vec{i}$ и $y\vec{j}$ называются составляющими (или компонентами) вектора $\vec{a}$ по осям координат. Если начало вектора $\vec{a}$ находится в точке $A(x_A; y_A)$, а конец в точке $B(x_B; y_B)$, то разложение вектора $\vec{a}$ записывается в виде:

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}.$$

Правила действий над векторами, заданными своими координатами.

Если в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$ заданы векторы $\vec{a} = (x_1, y_1)$ и $\vec{b} = (x_2, y_2)$, то:

- координаты суммы двух (или более) векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых, т.е. $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2; y_1 + y_2)$;
- координаты разности двух векторов равны разностям соответствующих координат этих векторов, т.е. $\vec{a} - \vec{b} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$;

- координаты произведения вектора на число равны произведениям соответствующих координат данного вектора на это число, т.е. $m\vec{a} = (mx_1, my_1)$;

Пример 1. Найти координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если $A(-1; -2)$, $B(4; 5)$.

Решение: по формуле $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x; y) = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ получим $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (4 - (-1); 5 - (-2)) = (5; 7)$.

Пример 2. Выразить через единичные векторы $\vec{i}$ и $\vec{j}$ следующие векторы:

1) $\vec{a} = (-2; 4)$; 2) $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $A(-2; -1)$, $B(4; -3)$.

Решение: 1) Здесь $x = -2$, $y = 4$. По формуле $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ получим $\vec{a} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$.

2) По формуле $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j}$ находим $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (4 - (-2))\vec{i} + (-3 - (-1))\vec{j} = 6\vec{i} - 2\vec{j}$.

Длина вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_1 - x_2; y_1 - y_2)$ находится по формуле $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$. С помощью этой формулы вычисляется также расстояние между двумя точками на плоскости.

Пример 3. Найти длину вектора $\overrightarrow{AB}$, если $A(1; 1)$ и $B(4; -3)$.

Решение: по формуле $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$ находим $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(4 - 1)^2 + (-3 - 1)^2} = 5$

Скалярное произведение двух векторов

Скалярным произведением двух ненулевых векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается символом $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Таким образом, по определению, $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\angle \vec{a}, \vec{b})$.

Скалярное произведение двух векторов равно модулю одного из них, умноженному на проекцию другого вектора по направлению первого

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{пр}_a \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{пр}_b \vec{a}.$$

Скалярным квадратом вектора $\vec{a}$ называется скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2$.

Необходимым и достаточным условием перпендикулярности двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ является равенство нулю их скалярного произведения: $(\vec{a} \neq 0, \vec{b} \neq 0, \vec{a} \cdot \vec{b} = 0) \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ выражается через их координаты по формуле: $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 x_2 + y_1 y_2$.

Угол между двумя векторами $\vec{a}(x_1; y_1)$ и $\vec{b}(x_2; y_2)$ находится по формуле: $\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$. Из этой формулы следует, что если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$.

Пример 3. Найти скалярное произведение векторов $\vec{a} = (-3; 2)$ и $\vec{b} = (4; 3)$.

Решение: по формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 3 = -6$.

Пример 4. Проверить, перпендикулярны ли векторы:

1) $\vec{a} = (-3; 2)$ и $\vec{b} = (4; 6)$; 2) $\vec{c} = (3/4; -1/5)$ и $\vec{d} = (4/3; 5)$; 3) $\vec{p} = (-2; 5)$ и $\vec{q} = (3; 1)$.

Решение: по формуле $x_1 x_2 + y_1 y_2 = 0$ находим:

1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 0$, т.е. $\vec{a} \perp \vec{b}$;

2) $\vec{c} \cdot \vec{d} = (3/4) \cdot (4/3) + (-1/5) \cdot 5 = 0$, т.е. $\vec{c} \perp \vec{d}$;

3) $\vec{p} \cdot \vec{q} = (-2) \cdot 3 + 5 \cdot 1 = -1 \neq 0$, т.е. $\vec{p} \not\perp \vec{q}$.

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 9. Решение иррациональных уравнений

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: отработать основные приемы решения иррациональных уравнений и неравенств.

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задание: решить задачи

1. Решить уравнения:

1) $4x + \sqrt{11 + 7x - 9x^2} = 1$;

2) $5x + \sqrt{4 - 3x + 15x^2} = 1$;

3) $2x + \sqrt{10 - 3x - 6x^2} = 1$;

4) $3x + \sqrt{10 + x - 7x^2} = 1$;

$$5) x + \sqrt{10 - 5x - x^2} = 1;$$

$$6) \sqrt{x+3} - \sqrt{7-x} = \sqrt{2x-8};$$

$$7) \sqrt{1-x} = \sqrt{6-x} - \sqrt{-2x-5};$$

$$8) \sqrt{3x+3} + \sqrt{4x-4} = \sqrt{6x+13};$$

$$9) \sqrt{3x+4} - \sqrt{3x-3} = \sqrt{2x-7};$$

$$10) \sqrt{1-x} = \sqrt{6-x} - \sqrt{-2x-5}.$$

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Уравнение, содержащее переменную под знаком корня, называется *иррациональным*.

Решение иррационального уравнения основано на преобразовании его к рациональному путем возведения обеих его частей в одну и ту же степень (иногда несколько раз).

Рассмотрим основные методы решения иррациональных уравнений на примерах.

Пример 1. Решить уравнение: $\sqrt{x^2 - 7} = 3$.

Решение: возведем обе части уравнения в квадрат $x^2 - 7 = 9$, $x^2 = 16$, $x_1 = -4$, $x_2 = 4$. Проверка при $x = -4$ $3=3$ – верно, при $x = 4$, $3=3$ – верно. Ответ: -4, 4.

Пример 2. $\sqrt{x-5} = \sqrt{3-x}$.

Решение: подкоренные выражения не должны быть отрицательными $\begin{cases} x-5 \geq 0, \\ 3-x \geq 0, \end{cases} \begin{cases} x \geq 5, \\ x \leq 3. \end{cases}$ Полученная система неравенств решения не имеет, следовательно, и исходное уравнение не имеет решений. Ответ: решений нет.

Пример 3. $\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} = 5$.

Решение: I способ. Возведем обе части уравнения в квадрат $(\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1})^2 = 25$, $\Leftrightarrow x-1 + 2\sqrt{(x-1)(2x-1)} + 2x-1 = 25$, $\Leftrightarrow 2\sqrt{(x-1)(2x-1)} = 27 - 3x$. Возведем обе части последнего уравнения в квадрат $4(x-1)(2x-1) = (27 - 3x)^2$, раскрываем скобки, приводим подобные. Получаем уравнение $x^2 - 150x + 725 = 0$, $x_1 = 5$, $x_2 = 145$. Проверка: при $x=5$ $5=5$ – верно, при $x=145$ $29=5$ – неверно. Ответ: 5

II способ. Исходное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} (\sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1})^2 = 25, \\ x \geq 1, \\ x \geq \frac{1}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4(x-1)(2x-1) = (27-3x)^2, \\ x \geq 1, \\ 27-3x \geq 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 - 150x + 725 = 0, \\ x \geq 1, \\ x \leq 9, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5, \\ x = 145, \\ 1 \leq x \leq 9. \end{cases} \quad \text{Решением данной системы является}$$

$x=5$. Ответ: 5.

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 10. Решение показательных уравнений

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: отработать методы решения основных видов показательных уравнений.

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задание:

1. Решить уравнения:

1) $2^x - 2^{x-4} = 15;$	7) $\left(\frac{1}{4}\right)^{(4x-5)(5-x)-1} = 16^{x^2};$
2) $2^{x+3} - 2^x = 112;$	8) $\left(\frac{1}{7}\right)^{(2x-3)(5-2x)-1} = 49^{x^2};$
3) $3^{2x} - 2 \cdot 3^{2x-2} - 2 \cdot 3^{2x-1} = 1;$	9) $\left(\frac{1}{2}\right)^{(4x-9)(9-x)-1} = 16^{x^2};$
4) $5 \cdot 2^{\sqrt{x}} - 3 \cdot 2^{\sqrt{x}-1} = 56;$	10) $\left(\frac{1}{3}\right)^{(4x-11)(1-x)-3} = 27^{x^2}.$
5) $3^{2x-1} - 3^{2x} + 3^{2x+3} = 237;$	
6) $7^{2x} - 6 \cdot 7^x + 5 = 0;$	

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Уравнение, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным. Простейшим примером показательного уравнения служит уравнение $a^x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Решение показательного уравнения вида $a^{f(x)} = a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$ основано на том, что это уравнение равносильно уравнению $f(x) = g(x)$.

Уравнение вида $Aa^{2x} + Ba^x + C = 0$ с помощью подстановки $a^x = t$, $t > 0$ сводится к квадратному уравнению $At^2 + Bt + C = 0$.

Пример 1. Решить уравнение $2^{x^2-7x+12} = 1$.

Решение: представим правую часть как $1 = 2^0$, получим $2^{x^2-7x+12} = 2^0$, то есть левая и правая части приведены к одному основанию. Следовательно, данное уравнение равносильно уравнению $x^2 - 7x + 12 = 0$. Решением данного уравнения являются $x_1 = 3$, $x = 4$.

Ответ: 3, 4.

Пример 2. Решить уравнение $2^{x+3} - 2^x = 112$.

Решение: вынесем общий множитель за скобки $2^x(2^3 - 1) = 112$, $7 \cdot 2^x = 112$, $2^x = \frac{112}{7}$, $2^x = 16$, $2^x = 2^4$, $x = 4$. Ответ: 4.

Пример 3. Решить уравнение $4^x + 2^{x+1} - 8 = 0$.

Решение: преобразуем уравнение к виду $2^{2x} + 2 \cdot 2^x - 8 = 0$. Положим $t = 2^x$, $t > 0$. Тогда данное уравнение примет вид $t^2 + 2 \cdot t - 8 = 0$. Откуда $t_1 = -4$, $t_2 = 2$. $t_1 = -4$ не удовлетворяет условию $t > 0$. Тогда $2^x = 2$ и $x = 1$. Ответ: 1.

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 11. Решение логарифмических уравнений

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: отработать методы решения основных видов логарифмических уравнений.

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задание: Решить уравнение:

1) $\lg x + \lg(x+3) = 1$;

6) $\log_{2-x}(2x^2 - 5x + 2) = 2$;

2) $\lg(x^2 - 17) - \lg(2x - 2) = 0$;

7) $\log_{x-1}(x^2 - 7x + 41) = 2$;

$$3) \lg\left(\frac{1}{2} + x\right) = \lg\frac{1}{2} - \lg x;$$

$$4) \lg(2x-1) + 2\lg\sqrt{x-9} = 2;$$

$$5) \lg(x+4) - \lg(x-3) = \lg 8;$$

$$8) \log_x(2x^2 - 3x) = 1;$$

$$9) \log_{x+2}(2x^2 - 5x + 18) = 2;$$

$$10) \log_9(4x+39) - \log_9 17 = \log_9 x.$$

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Уравнение, содержащее переменную под знаком логарифма, называется логарифмическим. Простейшим примером логарифмического уравнения служит уравнение $\log_a x = b$, $a > 0$, $a \neq 1$.

Решение логарифмического уравнения вида $\log_a f(x) = \log_a g(x)$, $a > 0$, $a \neq 1$ основано на том, что такое уравнение равносильно уравнению $f(x) = g(x)$ при дополнительных условиях $f(x) > 0$, $g(x) > 0$.

Переход от уравнения $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ к уравнению $f(x) = g(x)$ иногда приводит к появлению посторонних корней. Такие корни можно выявить с помощью подстановки найденных корней в исходное логарифмическое уравнение, либо с помощью нахождения области определения исходного уравнения (эта область задается системой неравенств $f(x) > 0$, $g(x) > 0$).

При решении логарифмических уравнений часто бывает полезен метод введения новой переменной.

При решении уравнений, содержащих переменную и в основании, и в показателе степени, используется метод логарифмирования. Если при этом в показателе степени содержится логарифм, то обе части уравнения надо прологарифмировать по основанию этого логарифма.

Пример 1. Решить уравнение $\log_3(x-12) = 2$.

Решение: Используя определение логарифма, получим $\log_3(x-12) = 2 \Leftrightarrow x-12 = 2^3 \Leftrightarrow x = 21$. Проверка: при $x=1$ $\log_3 8 = 2$ или $2=2$. Ответ: 21.

Пример 2. Решить уравнение $\lg(x-3) + \lg(x-2) = 1 - \lg 5$.

Решение: Учитывая, что $1 = \lg 10$ и используя свойства логарифмов, получим $\lg(x-3)(x-2) = \lg 2$. Последнее уравнение равносильно уравнению $(x-3)(x-2) = 2$, откуда $x_1 = 1$, $x_2 = 4$. Проверкой убеждаемся, что $x_1 = 1$ - посторонний корень. Ответ: 4.

Пример 3. Решить уравнение $4^{\log_2 \lg x} = \lg x - \lg^2 x + 1$.

Решение: учитывая, что $4^{\log_2 \lg x} = (2^2)^{\log_2 \lg x} = (2^{\log_2 \lg x})^2 = \lg^2 x$.
Исходное уравнение равносильно следующему $\lg^2 x = \lg x - \lg^2 x + 1$ или $2\lg^2 x - \lg x - 1 = 0$. Решая квадратное уравнение относительно $\lg x$, получим $\lg x = 1$ или $\lg x = -\frac{1}{2}$. Откуда $x_1 = 10$, $x_2 = 0,01$. Проверкой убеждаемся, что $x_1 = 0,01$ - посторонний корень. Ответ: 10.

Пример 4. Решить уравнение $x^{\lg x} = 100x$.

Решение: прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10, получим $\lg x^{\lg x} = \lg 100x$. Преобразовываем последнее уравнение по свойствам логарифмов, получим $\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$. Решая квадратное уравнение относительно $\lg x$, получим $\lg x = -1$ или $\lg x = 2$. Откуда $x_1 = 0,1$, $x_2 = 100$. Ответ: 100, 0,1.

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 12. Решение тригонометрических уравнений

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: отработать методы решения основных видов тригонометрических уравнений.

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задание: решить задачи

- | | |
|-------------------------------------|--------------------------------------|
| 1) $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$; | 6) $8\sin^2 x - \cos x + 1 = 0$; |
| 2) $4\cos^2 x - 8\cos x + 3 = 0$; | 7) $3\lg^2 x + 2\lg x - 1 = 0$; |
| 3) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$; | 8) $3\lg^2 x + 3\lg x - 2 = 0$; |
| 4) $5\sin^2 x + 6\sin x - 6 = 0$; | 9) $3\sin^2 x + 3\cos x = 0$; |
| 5) $5\sin^2 x + 6\cos x - 6 = 0$; | 10) $4\sin^2 x + 11\sin x - 3 = 0$. |

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Уравнение вида $\sin x = a$, $-1 \leq a \leq 1$

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение вида $\cos x = a$, $-1 \leq a \leq 1$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\arccos(-a) = \pi - \arccos a.$$

Уравнение вида $\operatorname{tg} x = a$,

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Уравнение вида $\operatorname{ctg} x = a$,

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Частные случаи:

$$\sin x = 1, \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\sin x = 0, \quad x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\cos x = 1, \quad x = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\cos x = -1, \quad x = \pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = 1, \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = -1, \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg} x = 0, \quad x = \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = 0, \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{ctg} x = -1, \quad x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Пример 1. Решить уравнение $\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение: решение данного уравнения можно записать в виде

$$3x = (-1)^k \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ Так как } \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{3}, \text{ то}$$

$$3x = (-1)^k \frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}. \text{ Отсюда } x = (-1)^k \frac{\pi}{9} + \frac{\pi k}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2. Решить уравнение $\cos 2x = -\frac{1}{2}$.

Решение: решение данного уравнения можно записать в виде $2x = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, k \in Z$. Так как $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$, то

$$2x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z. \text{ Отсюда } x = \pm \frac{\pi}{3} + \pi k, k \in Z.$$

Пример 3. Решить уравнение $\operatorname{tg} 3x = -1$.

Решение: это частный случай, и поэтому

$$3x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z,$$

$$x = -\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{3}, k \in Z.$$

Пример 4. Решить уравнение $2\sin^2 x + 3\cos x = 0$ (уравнение, сводящееся к квадратному).

Решение: учитывая, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, получим $2\cos^2 x - 3\cos x - 2 = 0$. Сделаем замену $t = \cos x, -1 \leq t \leq 1$, получим квадратное уравнение $2t^2 - 3t - 2 = 0$. Решение данного уравнения $t_1 = 2, t_2 = -\frac{1}{2}$, $t_1 = 2$ - не удовлетворяет условию $-1 \leq t \leq 1$. Тогда $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Откуда $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$.

Пример 5. Решить уравнение $5\sin^2 x + 3\cos^2 x = 4\sin 2x$ (уравнение однородное относительно $\sin x, \cos x$).

Решение: заменим $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, получим $5\sin^2 x - 8\cos x \sin x + 3\cos^2 x = 0$. Разделим обе части уравнения на $\cos^2 x \neq 0$, получим квадратное уравнение относительно $\operatorname{tg} x$, $5\operatorname{tg}^2 x - 8\operatorname{tg} x + 3 = 0$. Решая последнее уравнение, получим

$$\operatorname{tg} x = 1, x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z \text{ или } \operatorname{tg} x = \frac{3}{5}, x = \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \pi k, k \in Z.$$

$$\text{Ответ: } x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z, x = \operatorname{arctg} \frac{3}{5} + \pi k, k \in Z.$$

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 13. Решение показательных и логарифмических неравенств

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: отработать методы решения основных видов показательных неравенств.

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задание: Решить неравенства:

$$1) 6^{x^2-7x+12} > 1; \quad 2) \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-5x+8} < \frac{1}{9}; \quad 3) 2^{x^2-8x+19} > 16;$$

$$4) 3^{x^2-3x+5} < 27; \quad 5) 0,4^{x^2-x-20} > 1; \quad 6) 4^x - 6 \cdot 2^x + 8 < 0;$$

$$7) \left(\frac{4}{3}\right)^{x+1} - \left(\frac{4}{3}\right)^x > \frac{3}{16}; \quad 8) \left(\frac{1}{3}\right)^{2x-1} \leq 27^{-1}; \quad 9) \left(\frac{3}{5}\right)^{3x-7} > \left(\frac{5}{3}\right)^{-3+7x};$$

$$10) \left(\frac{2}{5}\right)^{1-2x} \leq \left(\frac{5}{2}\right)^{2+x}.$$

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Неравенство, содержащее переменную в показателе степени, называется показательным.

Решение показательных неравенств вида $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, $a > 0$, $a \neq 1$ основано на следующих утверждениях:

- если $a > 1$, то неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) < g(x)$, так как при $a > 1$ показательная функция возрастает;

- если $0 < a < 1$, то неравенство $a^{f(x)} < a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x) > g(x)$, так как при $0 < a < 1$ показательная функция убывает.

Пример 1. Решить неравенство $0,5^{7-3x} < 4$.

Решение: пользуясь тем, что $0,5^{-2} = 4$, перепишем заданное неравенство в виде $0,5^{7-3x} < 0,5^{-2}$. Так как основание $a = 0,5$, $0 < a < 1$, то функция $y = a^x$ убывает. Поэтому данное неравенство равносильно неравенству $7 - 3x > -2$, откуда $x < 3$. Ответ: $(-\infty; 3)$.

Пример 2. Решить неравенство $\left(\frac{1}{9}\right)^x - \frac{28}{3^{x+1}} + 3 < 0$.

Решение: сделаем замену $t = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, тогда неравенство переписывается в виде $t^2 - \frac{28}{3}t + 3 < 0$. Решая данное неравенство методом интервалов, получаем $\frac{1}{3} < t < 9$. Следовательно, решением данного неравенства являются числа x , удовлетворяющие неравенству $\frac{1}{3} < 3^x < 9$. Так как $\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right)^1$, $9 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$, а функция $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ убывает, так как $\frac{1}{3} < 1$. Поэтому решением неравенства $\frac{1}{3} < 3^x < 9$ будут числа x , удовлетворяющие неравенствам $-2 < x < 1$. Ответ: $(-2; 1)$.

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 14. Вычисление производных

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: отработать навыки дифференцирование элементарных и сложных функций.

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задания:

1. Найти производные функций при данном значении аргумента:

- | | |
|--|---|
| 1) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 5$, $f'(2)$; | 10) $f(z) = \frac{\sqrt{z+1}}{z}$, $f'(3)$; |
| 2) $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 5x + 3$, $f'(2)$; | 11) $f(z) = \frac{\sqrt{z-1}}{z}$, $f'(2)$; |
| 3) $f(x) = 4x + 10 - \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{5}{\sqrt[3]{x^2}} - 5$, $f'(1)$; | |

$$\begin{aligned}
4) \quad f(x) &= (x+1)\sqrt{x-1}, \quad f'(5); \\
5) \quad f(x) &= (x-1)\sqrt{x+1}, \quad f'(3); \\
6) \quad f(x) &= (x+1)\sqrt{x^2-1}, \quad f'(2); \\
7) \quad f(z) &= (z-1)\sqrt{z^2-1}, \quad f'(2); \\
8) \quad f(t) &= (t+1)\sqrt{t^2+1}, \quad f'(1); \\
9) \quad f(z) &= \frac{1}{49}(z^3-1)^3, \quad f'(2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
12) \quad f(z) &= \frac{\sqrt{z^2+1}}{z}, \quad f'(\sqrt{3}); \\
13) \quad f(z) &= \frac{\sqrt{z^2-1}}{z}, \quad f'(\sqrt{5}); \\
4) \quad f(z) &= \frac{9z}{\sqrt{z^2+1}}, \quad f'(2\sqrt{2}); \\
15) \quad f(z) &= \frac{6z}{\sqrt{z^2+1}}, \quad f'(\sqrt{3}).
\end{aligned}$$

2. Найти производные функции

$$\begin{aligned}
1) \quad f(x) &= \ln \sqrt{2x-1}; & 2) \quad f(x) &= x^2 e^x; \\
3) \quad f(x) &= \frac{0,3^{-x}}{\sqrt{x+0,5}}; & 4) \quad f(x) &= \cos^3 x; \\
9) \quad f(x) &= \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right); & 10) \quad f(x) &= \arcsin 3x; \\
11) \quad f(x) &= \operatorname{arcctg}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).
\end{aligned}$$

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Определение. Пусть задана функция $f(x)$, $x \in (a, b)$, и пусть x_0 - некоторая точка интервала (a, b) . Предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$. То есть
$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется дифференцируемой в этой точке.

Правило нахождения производной функции в точке по определению:

1. найти разность $f(x) - f(x_0)$;

2. найти отношение $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;

3. найти предел этого отношения при $x \rightarrow x_0$ $f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Пример 1. Найти производную функции $f(x) = x^3$, $x \in \mathbb{R}$.

Решение:

1. Находим разность $f(x) - f(x_0) = x^3 - x_0^3 = (x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)$.

2. Находим отношение $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{(x - x_0)(x^2 + xx_0 + x_0^2)}{x - x_0} = x^2 + xx_0 + x_0^2$.

3. Вычисляем предел $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^2 + xx_0 + x_0^2) = 3x_0^2$.

Таким образом, $f'(x) = 3x^2$.

Основные правила дифференцирования.

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
2. $(uv)' = u'v + uv'$
3. $(cu)' = cu'$.
4. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Производная сложная функции.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \text{ или } y'(x) = y'(u) \cdot u'(x).$$

Формулы дифференцирования.

При условии $u = \varphi(x)$	При условии $u = x$
	$C' = 0, C \equiv \text{const}$
	$x' = 1$
$(u^n)' = nu^{n-1}u'$, n – любое действительное число	$(x^n)' = nx^{n-1}$, n – любое действительное число
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2}u'$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$
$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}}u'$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\ln u)' = \frac{1}{u}u'$	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
$(a^u)' = a^u \ln a u'$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(e^u)' = e^u u'$	$(e^x)' = e^x$
$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	$(\cos x)' = -\sin x$
$(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} u'$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} u'$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$ $ u < 1$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $ x < 1$
$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} u'$ $ u < 1$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} u'$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\operatorname{arctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} u'$	$(\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

Пример 2. Найти производную функции $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$.

Решение: применив последовательно правило вычисления производной суммы и формулы вычисления производной степенной функции имеем

$$f'(x) = (4x^3)' - (2x^2)' + x' - 5' = 4(x^3)' - 2(x^2)' + x' - 5' = 4 \cdot 3x^2 - 2 \cdot 2x + 1 = 12x^2 - 4x + 1.$$

Пример 3. Найти производную функции $f(x) = (x^3 - 1)(x^2 + x + 1)$.

Используя правило дифференцирования произведения и соответствующие формулы нахождения производных, получим

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3 - 1)'(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)'(x^3 - 1) = 3x^2(x^2 + x + 1) + (2x + 1)(x^3 - 1) = \\ &= 3x^2(x^2 + x + 1) + (2x + 1)(x - 1)(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1)[3x^2 + (2x + 1)(x - 1)] = \\ &= (x^2 + x + 1)(3x^2 + 2x^2 - 2x + x - 1) = (x^2 + x + 1)(5x^2 - x - 1). \end{aligned}$$

Пример 4. Найти производную функции $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$.

Решение: используя правило дифференцирования частного и соответствующие формулы нахождения производных, получим

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right)' = \frac{(x^2 + 1)'(x^2 - 1) - (x^2 - 1)'(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^2 - 1) - 2x(x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2} = \\ &= \frac{2x(x^2 - 1 - x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(-2)}{(x^2 - 1)^2} = -\frac{4x}{(x^2 - 1)^2}. \end{aligned}$$

Пример 5. Найти производную функции $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

Решение: полагая $u = \sqrt{4 - x^2}$, получим $f(x) = \sqrt{u}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}} (4-x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Пример 6. Найти производную функции $f(x) = \sin^3 3x$.

Полагая $3x = u$, получим $f(x) = \sin^3 u$. Применяя правило вычисления производной сложной функции, имеем

$$f'(x) = (\sin^3 u)' = 3\sin^2 u (\sin u)' = 3\sin^2 3x \cos 3x (3x)' = 3\sin^2 3x \cdot \cos 3x \cdot 3 = 9\sin^2 3x \cdot \cos 3x.$$

Пример 7. Найти производную функции $f(x) = \arccos \sqrt{2x}$.

$$f'(x) = (\arccos \sqrt{2x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}} (\sqrt{2x})' = -\frac{1}{\sqrt{1-2x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2x}} \cdot 2 =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{1-2x}} \frac{1}{\sqrt{2x}} = -\frac{1}{\sqrt{2x(1-2x)}}.$$

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 15.

Исследование функции и построение ее графика (многочлен)

Количество часов на выполнение :2 часа

Цель работы: обобщить схему исследования функций, заданных в виде многочленов и построение графиков функций по данным исследованиям.

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задание: решить задачи

Исследовать данные функции и построить их графики:

- 1) $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{5}{2}x^2 + 6x$;
- 2) $y = \frac{1}{3}x^3 + 2x$;
- 3) $y = x^3 - x^2 + 6x$;
- 4) $y = 2x^3 + 4x^2 - 10x$;
- 5) $y = x^3 + 3x^2$;
- 6) $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + \frac{1}{3}$;
- 7) $y = x^3 - 9x^2 - 24x - 12$;
- 8) $y = x^3 + 3x^2 + 24x - 8$;
- 9) $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4$;

$$10) y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 3x - 4.$$

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Общая схема построения графиков функции

- 1) Найти область определения функции.
- 2) Выяснить, не является ли функция чётной, нечётной или периодической.
- 3) Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднения).
- 4) Найти интервалы знакопостоянства функции.
- 5) Асимптоты графика функции.
- 6) Найти промежутки монотонности функции и её экстремумы.
- 7) Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
- 8) Построить график, используя полученные результаты исследования.

Правила нахождения экстремумов функции $y=f(x)$ с помощью первой производной.

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти критические точки функции $y=f(x)$, т.е. точки в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.
3. Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. При этом критическая точка x_0 есть минимума, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x) < 0$, от промежутка, в котором $f'(x) > 0$, и точка максимума – в противном случае. Если же в соседних промежутках, раздельной критической точкой x_0 , знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.
4. Вычислить значения функции в точках экстремума.

Определение: Прямая $y=kx+b$ называется асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$ если $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$, где $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$, $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx)$.

Аналогично определяется и находится асимптота графика функции $f(x)$ при $x \rightarrow -\infty$.

Определение: Прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \pm\infty$ или $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \pm\infty$.

Пример. Исследовать функцию $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$ и построить ее график.

Решение:

1. Функция определена на всей числовой прямой, т.е. $D(y)=R$.
 2. Данная функция, не является ни чётной, ни нечётной: кроме того, она не является периодической.

3. Найдём точку пересечения графика с осью Oy : полагая $x=0$, получим $y=-3$. Точки пересечения графика с осью Ox в данном случае найти затруднительно.

4. Очевидно, что график функции не имеет асимптот.

5. Найдём производную: $y' = 3x^2 - 12x + 9$ Далее имеем, $3x^2 - 12x + 9 = 0$ или $x^2 - 4x + 3 = 0$. Отсюда, $x=1$ и $x=3$. Точки $x=1$ и $x=3$ делят область определения функции на три промежутка: $-\infty < x < 1$, $1 < x < 3$ и $3 < x < +\infty$. В промежутках $-\infty < x < 1$, и $3 < x < +\infty$ $y' > 0$, т.е. функция возрастает, а в промежутке $1 < x < 3$ $y' = 6x - 12$, т.е. функция убывает. При переходе через точку $x=1$ производная меняет знак с плюса на минус, Рис. 1

а при переходе через точку $x=3$ - с минуса на плюс. Значит, $y_{\max} = y(1) = 1$, $y_{\min} = y(3) = -3$.

6. Найдём вторую производную: $y'' = 6x - 12$; $6x - 12 = 0$, $x=2$. Точка $x=2$ делит область определения функции на два промежутка $-\infty < x < 2$ и $2 < x < +\infty$. В первом из них $y'' < 0$, а во втором $y'' > 0$, т.е. в промежутке $-\infty < x < 2$ кривая выпукла вверх, а в промежутке $2 < x < +\infty$ выпукла вниз. Таким образом, получаем точку перегиба $(2; -1)$;

7. Используя полученные данные, строим искомый график. (рис. 17.1)

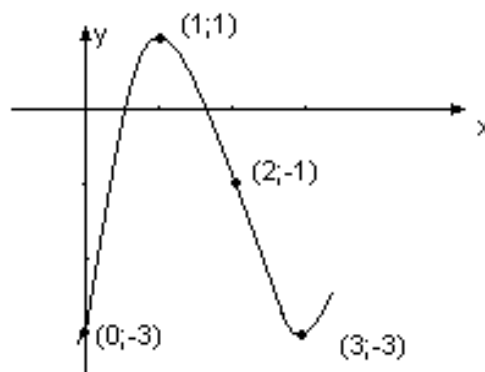


Рис. 17.1

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 16

Вычисление неопределенных интегралов.

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: отработать основные правила нахождения первообразных функций, освоить основные формулы интегрирования.

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задание: решить задачи

Найдите интегралы:

$$1) \int \left(\frac{4}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 8 \right) dx;$$

$$2) \int (x^4 - 8x^3 + 4x) dx;$$

$$3) \int \frac{x^3 + 3x^2 + 4x}{x} dx;$$

$$4) \int 3(2x^2 - 1)^2 dx;$$

$$5) \int x^4(x-1) dx;$$

$$6) \int (x^{-4} - x^{-3} - 3x^{-2} + 1) dx;$$

$$7) \int (3x^{-4} + 8x^{-5}) dx;$$

$$8) \int (5x^{\frac{3}{2}} - 7x^{\frac{3}{4}}) dx;$$

$$9) \int (4x^3 - 6x^2 - 4x + 3) dx;$$

$$10) \int \frac{x^{\frac{3}{4}} + 3x^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{1}{2}}}{x} dx.$$

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Определение: функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ в промежутке $a \leq x \leq b$, если в любой точке этого промежутка ее производная равна $f(x)$:

$$F'(x) = f(x), \quad a \leq x \leq b.$$

Определение: совокупность первообразных для функции $f(x)$ называется неопределенным интегралом и обозначается символом $\int f(x) dx$.

Таким образом, $\int f(x) dx = F(x) + C$.

Здесь $f(x)$ - подынтегральная функция, $f(x)dx$ - подынтегральное выражение, C – произвольная постоянная.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то $(\int f(x) dx)' = f(x)$,
 $d(\int f(x) dx) = f(x) dx$.

2. Если $f(x)$ - дифференцируемая функция, то $\int f'(x) dx = f(x) + C$,
 $\int df(x) = f(x) + C$.

3. Если функция $f(x)$ имеет первообразную, то при $a \neq 0$ верно равенство $\int af(x)dx = a \int f(x)dx$.

4. Если функция $f(x)$ и $g(x)$ имеют первообразные, то $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$.

Таблица неопределенных интегралов

- | | |
|--|---|
| 1. $\int dx = x + C$; | 2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1)$; |
| 3. $\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$; | 4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$; |
| 5. $\int e^x dx = e^x + C$; | 6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$; |
| 7. $\int \cos x dx = \sin x + C$; | 8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$; |
| 9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$; | 10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x-a}{x+a} \right + C$; |
| 11. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C$; | 12. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$; |
| 13. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$. | |

Пример 1. Для функции $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (0; +\infty)$, найти первообразную $F(x)$, график которой проходит через точку $(2; 2)$.

Решение: так как при всех $x \in (0; +\infty)$ верно равенство $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, то

$\ln x$ - одна из первообразных функции $f(x) = \frac{1}{x}$. Следовательно, $F(x) = \ln(x) + C$, C - некоторая постоянная. Постоянную C находим из условия $F(2) = 2$, то есть $\ln(x) + C = 2$, откуда $C = 2 - \ln 2$. Значит, $F(x) = \ln(x) + 2 - \ln 2 = \ln \frac{x}{2} + 2$.

Пример 2. Найти интеграл $\int 2(3x-1)^2 dx$.

$$\int 2(3x-1)^2 dx = \int (18x^2 - 12x + 2) dx = 18 \int x^2 dx - 12 \int x dx + 2 \int dx = 6x^3 - 6x^2 + 2x + C$$

Пример 3. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

Решение: $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2x^{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C.$

Пример 4. Найти интеграл $\int \frac{x dx}{x^2 + 1}.$

Решение: так как $x dx = \frac{1}{2} d(x^2 + 1),$ то

$$\int \frac{x dx}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2 + 1)}{x^2 + 1} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) + C.$$

Пример 5. Найти интеграл $\int e^{-3x^2} x dx.$

Решение: так как $x dx = -\frac{1}{6} d(-3x^2),$

$$\text{то } \int e^{-3x^2} x dx = -\frac{1}{6} \int e^{-3x^2} d(-3x^2) = -\frac{1}{6} e^{-3x^2} + C.$$

Пример 6. Найти интеграл $\int \cos(5x - 3) dx.$

Решение: так как $dx = \frac{1}{5} d(5x - 3),$

$$\text{то } \int \cos(5x - 3) dx = \frac{1}{5} \int \cos(5x - 3) d(5x - 3) = \frac{1}{5} \sin(5x - 3) + C.$$

Пример 7. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 16x^2}}.$

$$\text{Решение: } \int \frac{dx}{\sqrt{9 - 16x^2}} = \int \frac{dx}{4\sqrt{\frac{9}{16} - x^2}} = \frac{1}{4} \int \frac{dx}{\sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - x^2}} = \frac{1}{4} \arcsin \frac{4x}{3} + C$$

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 17. Вычисление определенных интегралов

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: отработать основные методы вычисления определенных интегралов.

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задание: решить задачи

$$\begin{array}{lll}
 1) \int_4^5 (4-2x)^2 dx; & 2) \int_0^3 (3x-1)^{\frac{1}{3}} dx; & 3) \int_{-1}^2 (1-x)^2 dx; \\
 4) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx; & 5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx; & 6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{4}{\cos^2 x} dx; \\
 7) \int_0^1 e^{3x} dx; & 8) \int_{-2}^5 (x+3)^{\frac{2}{3}} dx; & 9) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left(\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x \right) dx; \\
 10) \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dx}{x^3}.
 \end{array}$$

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $a \leq x \leq b$. Разобьем этот отрезок на n частей точками $a < x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$, выберем на каждом элементарном отрезке $x_{k-1} \leq x \leq x_k$ произвольную точку ξ_k и обозначим через Δx_k длину каждого такого отрезка.

Определение: Интегральной суммой для функции $f(x)$ на отрезке $a \leq x \leq b$ называется сумма вида

$$\sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = f(\xi_1) \Delta x_1 + f(\xi_2) \Delta x_2 + \dots + f(\xi_n) \Delta x_n.$$

Определение: Определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $a \leq x \leq b$ называется предел интегральной суммы при условии, что длина наибольшего из элементарных отрезков стремится к нулю:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k.$$

Для любой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $a \leq x \leq b$, всегда существует определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит

формула Ньютона – Лейбница: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$, то есть

определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

При вычислении определенного интеграла методом замены переменной (способом подстановки) определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$

преобразуется с помощью подстановки $x = \varphi(u)$ в определенный интеграл относительно новой переменной u . При этом старые пределы интегрирования α и β , которые находятся из исходной подстановки:

$\alpha = \varphi(a)$, $\beta = \varphi(b)$. Таким образом, имеем $\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f[\varphi(u)]\varphi'(u)du$.

Пример 1. Вычислить определенный интеграл: $\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1)dx$.

Решение:

$$\int_{-1}^2 (x^2 + 2x + 1)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + x^2 + x \right]_{-1}^2 = \frac{1}{3}2^3 + 2^2 + 2 - \frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 + (-1) = 9.$$

Пример 2. Вычислить определенный интеграл: $\int_1^e \frac{dx}{x}$.

Решение: $\int_1^e \frac{dx}{x} = \ln x \Big|_1^e = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1$.

Пример 3. Вычислить определенный интеграл: $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$.

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x \Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = -(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{4}) = -(\frac{\sqrt{3}}{3} - 1) = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}.$$

Пример 4. Вычислить определенный интеграл: $\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

Решение:

$$\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin \Big|_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin(-1) = \frac{\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{6}.$$

Пример 5. Вычислить определенный интеграл: $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}}$.

Решение: положим $5x-1=u$, тогда $5dx=du$, $dx=\frac{1}{5}du$. Вычисляем новые пределы интегрирования: $u_n = 5 \cdot 1 - 1 = 4$, $u_g = 5 \cdot 2 - 1 = 9$. Поэтому

$$\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{5x-1}} = \int_1^2 (5x-1)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{5} \int_4^9 u^{-\frac{1}{2}} du = \frac{2}{5} u^{\frac{1}{2}} \Big|_4^9 = \frac{2}{5} (9^{\frac{1}{2}} - 4^{\frac{1}{2}}) = \frac{2}{5}.$$

Пример 6. Вычислить определенный интеграл: $\int_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}}$.

Решение: преобразуем подкоренное выражение: $4-9x^2 = 4[1-(\frac{3x}{2})^2]$. Положим $\frac{3x}{2} = u$, откуда $dx = \frac{2}{3} du$. Найдем новые пределы интегрирования:

$u_n = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $u_g = \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_{\frac{\sqrt{2}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}} &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{3} \arcsin u \Big|_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{3} \left(\arcsin \frac{\sqrt{3}}{2} - \arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \\ &= \frac{1}{3} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) = \frac{\pi}{36} \end{aligned}$$

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 18.

Вычисление углов между прямой и плоскостью, плоскостями

Количество часов на выполнение: 2 часа

Цель работы: отработать основные приемы решения задач на вычисление углов между прямыми, прямой и плоскостью, плоскостями.

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задание: решить задачи

1. Точка A удалена от каждой из вершины прямоугольного треугольника на 10 см. Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 12 см. Найти расстояние от точки A до плоскости треугольника.

2. A и B – точки, расположенные по одну сторону плоскости α ; AC и BD – перпендикуляр на эту плоскость; $AC = 19$ см; $BD = 10$ см; $CD = 12$ см. Вычислить расстояние между точками A и B .

3. В равнобедренном треугольнике ABC основание BC равно 12 см, боковая сторона 10 см. Из вершины A проведён отрезок $AD = 15$ см, перпендикулярный плоскости треугольника ABC . Найти расстояние от точки B до стороны BC .

4. A и B – точки, расположенные по одну сторону плоскости α ; AC и BD – перпендикулярны на эту плоскость; $AB = 20$ см, $AC = 15$ см, $BD = 15$ см. Вычислить расстояние между точками C и D .

5. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 15 и 20 см. Из вершины прямоугольника C проведён отрезок CD , перпендикулярные плоскости этого треугольника; $CD = 16$ см. Найти расстояние от точки D до гипотенузы AB .

6. Из вершины A прямоугольника $ABCD$ к его плоскости проведён перпендикуляр AM . Вычислить длину его перпендикуляра, если $MB = 15$ см, $MC = 24$ см, $MD = 20$ см.

7. Наклонная AM , проведенная из точки A к данной плоскости, равна d . Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой AM и данной плоскостью равен 60° .

8. Наклонная AM , проведенная из точки A к данной плоскости, равна d . Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если угол между прямой AM и данной плоскостью равен 30° .

9. Рёбра основания прямоугольного параллелепипеда имеют длину 4 см и 3 см; высота параллелепипеда равна 5 см. Найти его диагональ и угол диагонали с плоскостью основания.

10. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с плоскостью его основания угол в 45° . Стороны основания равны 120 см и 209 см. Определить высоту параллелепипеда.

11. Наклонная равна a . Чему равна проекция этой наклонной на плоскость, если наклонная составляет с плоскостью проекции угол, равный: 1) 45° ; 2) 60°

12. Точка отстоит от плоскости на h . Найти длину наклонных, проведённых из неё под следующими углами к плоскости: 1) 30° ; 2) 45°

13. Отрезок длиной 10 см пересекает плоскость; концы его находятся на расстоянии 3 см и 2 см от плоскости. Найти угол между данным отрезком и плоскостью.

14. Из точки, отстоящей от плоскости на a , проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы в 45° и 30° , а между собой прямой угол. Определить расстояние между концами наклонных.

15. Двугранный угол равен 45° . На одной грани дана точка на расстоянии a от другой грани. Найти расстояние этой точки от ребра.

16. Точка, взятая внутри двугранного угла в 60° , удалена от обеих граней на a . Найти её расстояние от ребра.

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Отрезок $АН$ называется перпендикуляром, проведенным из точки A к плоскости α , а точка H – основание перпендикуляра. Отметим в плоскости α

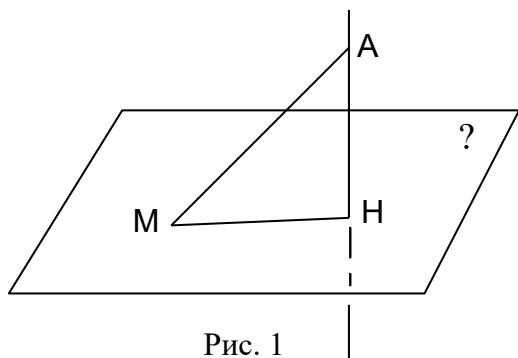


Рис. 1

какую-нибудь точку M , отличную от H , и проведем отрезок AM . Он называется наклонной, проведенной из точки A к плоскости α , а точка M – основанием наклонной. Отрезок HM – проекция наклонной на плоскость (рис. 21.1).

Перпендикуляр, проведенный из данной точки к плоскости, меньше любой проведенной из той же точки

перпендикуляра, проведенного из точки A к плоскости α , называется расстоянием от точки A до плоскости α .

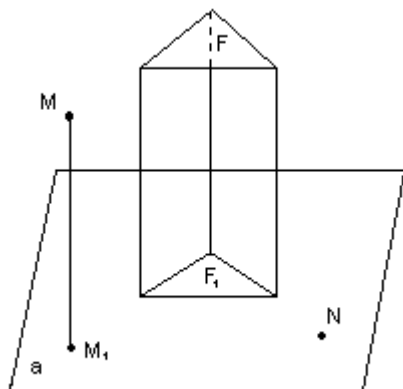
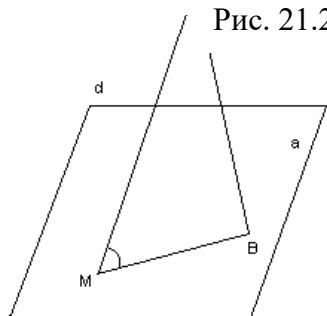


Рис. 21.2

Проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, проведенного из этой точки к плоскости, если точка не лежит в плоскости, и сама точка, если она лежит в плоскости. На рисунке 21.2 точка M_1 – проекция точки M на плоскость α , а N – проекция самой точки N на ту же плоскость, треугольник F_1 – проекция треугольника F на плоскость α .

Углом между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, называется углом между прямой и ее проекцией на плоскость.



Двугранным углом называется фигура, образованная прямой a и двумя полуплоскостями с общей границей a , не принадлежащими одной плоскости. Полуплоскости, образующие двугранный угол, называются его гранями. Прямая a - ребро двугранного угла.

Угол, образованный лучами, проведенными перпендикулярно к ребру, называется линейным углом двугранного угла (рис. 21.3).

Все линейные углы равны друг другу. Градусной мерой двугранного угла называется линейный угол. Если четырех углов, превосходит каждого

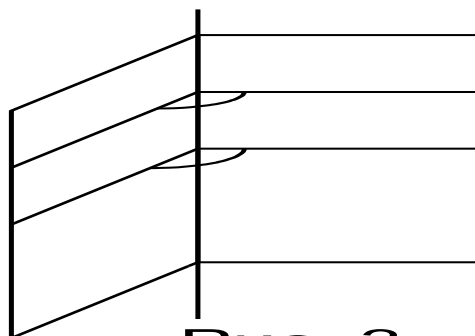


Рис. 3

углы двугранного угла. Градусная мера его угла α - тот из которых не из остальных, то

говорят, что угол между пересекающимися плоскостями равен α . Очевидно, $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$.

Пример 1. Расстояние от точки M до каждой из вершин правильного треугольника $\triangle ABC$ равно 4 см. Найти расстояние от точки M до плоскости ABC , если $AB=6$ см. (Рис. 21.5)

Решение: по условия $MA=MB=MC=4$ см. Пусть $MO \perp ABC$, тогда $OA=OB=OC$, как проекции равных наклонных.

Значит, O - центр окружности, описанной около $\triangle ABC$, а OA - радиус этой окружности.

$a_3 = R\sqrt{3}$, где $AB=a_3$, $R=AO$ поэтому $AO=6:\sqrt{3}=2\sqrt{3}$. Из $\triangle MAO$: $MO=\sqrt{MA^2 - AO^2}$; $MO=\sqrt{15-12}=2$. Ответ: 2 см.

Пример 2. Наклонная AM , проведенная из точки A к данной плоскости, равна d . Чему равна проекция этой наклонной на плоскости между прямой AM и данной плоскостью равен 45° .

Решение: MB - проекция наклонной AM на плоскость. $\triangle ABM$ - прямоугольный. $MB = d \cos \theta = d \cos 45^\circ = \frac{d\sqrt{2}}{2}$. Ответ: $\frac{d\sqrt{2}}{2}$.

Пример 3. Треугольник ABC - прямоугольный ($\angle C = 90^\circ$), $\angle A = 30^\circ$, $AC=a$, $DC \perp ABC$, $DC = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Чему равен угол между плоскостями ADC и ACB .

Решение: 1) $DK \perp AE$, $CD \perp AB$, значит, $CK \perp AB$; $\angle DKC$ - искомый.

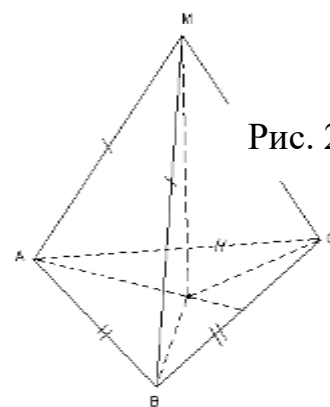


Рис.

Рис. 21.4

2) из $\triangle DKC$: $CK = \frac{AC}{2} = \frac{a}{2}$ (катет противолежащий 30°).

3) Рассмотрим

$$\triangle DKC: \angle C = 90^\circ, DC = \frac{\sqrt{3}}{2}a, CK = \frac{a}{2}, \operatorname{tg} \angle DKC = \frac{DC}{CK} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3}. \angle DKC = 60^\circ. \text{ Ответ: } \angle DKC = 60^\circ$$

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении

Практическая работа № 19. Вычисление объемов многогранников, объемов и площадей тел вращения

Количество часов на выполнение: 3 часа

Цель работы: рассмотреть основные задачи на вычисление объемов многогранников, объемов и площадей тел вращения.

Оборудование: Раздаточный материал, справочная литература, возможно использование рабочих тетрадей студентов.

Задание: решить задачи

1. Найти объем правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна 3, высота 4.
2. Объем пирамиды равен 56 см^3 , площадь основания 14 см^2 . Чему равна высота?
3. Объем правильной четырехугольной пирамиды равен 27 см^3 , высота 9см. Найти сторону основания
4. Объем усеченной пирамиды равен 210 см^3 , площадь нижнего основания 36 см^2 , верхнего 9 см^2 . Найдите высоту пирамиды.
5. Найти объем правильной треугольной пирамиды, если сторона основания равна 3, высота 4.
6. Стороны основания прямого параллелепипеда равна 7 см и $3\sqrt{2}$ см, а острый угол основания равен 45° . меньшая диагональ параллелепипеда составляет угол 45° с плоскостью основания. Найти объем параллелепипеда.
7. Площадь сферы равна 324 см^2 . Найдите радиус сферы.

8. 2.Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $2\sqrt{2}$. Найти объем цилиндра.
9. Найти радиус цилиндра, если его объем равен 120 см^3 , а высота $3,6 \text{ см}$.
10. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 20 см . Найти площадь основания цилиндра.
11. Радиус основания цилиндра 3 , высота 8 . Найдите диагональ осевого сечения.
12. Осевое сечение конуса – прямоугольный треугольник. Найти площадь осевого сечения конуса, если радиус основания конуса равен 3 см .
13. Площадь основания конуса $9\pi \text{ см}^2$. Площадь полной поверхности $24\pi \text{ см}^2$. найти объем конуса.
14. радиусы оснований усеченного конуса равны 3 м и 6 м , а образующая равна 5 м . найти объем усеченного конуса.
15. Осевым сечением конуса является равнобедренный, прямоугольный треугольник, площадь которого 9 см^2 . Найти объем конуса.
16. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 36 см . Найти радиус основания цилиндра.

Методика выполнения задания:

1. Изучите теоретический материал по данной теме.
2. Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
3. Выполните задания.

Теоретический материал

Параллелепипед.

$V = abc$ - объем прямоугольного параллелепипеда, где a , b , c – три измерения параллелепипеда.

$V = QH$ - объем прямого параллелепипеда, где Q – площадь основания параллелепипеда, H – его высота.

Призма.

$V = Sh$ - объем призмы, где S – площадь основания призмы, h – высота призмы.

Пирамида.

$V = \frac{1}{3}Sh$ - объем призмы, где S – площадь основания пирамиды, h – высота пирамиды.

Усеченная пирамида.

$V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{SS_1})$ - объем усеченной пирамиды, где S , S_2 – площади оснований пирамиды, h – высота пирамиды.

Цилиндр.

$S_{бок} = 2\pi rh$ - площадь боковой поверхности цилиндра, где r – радиус основания цилиндра, h – высота цилиндра.

$S_{полн} = 2\pi r(r + h)$ - площадь полной поверхности цилиндра, где r – радиус основания цилиндра, h – высота цилиндра.

$V = S_{осн} h$ - объем цилиндра, где $S_{осн} = \pi r^2$.

Сфера и шар.

$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ - уравнение сферы в прямоугольной декартовой системе координат радиуса R и центром $C(x_0, y_0, z_0)$.

$S_{сферы} = 4\pi R^2$ - площадь сферы, где R – радиус сферы.

$V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$ - объем шара.

Конус.

$S_{бок} = \pi r l$ - площадь боковой поверхности конуса, где r – радиус основания, l – образующая конуса.

$S_{полн} = \pi r(r + l)$ - площадь полной поверхности конуса, где r – радиус основания цилиндра, l – образующая конуса.

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ - объем конуса, где r – радиус основания конуса, h – высота конуса.

Усеченный конус.

$S_{бок} = \pi(r + r_1)l$ - площадь боковой поверхности усеченного конуса, где r, r_1 – радиусы оснований конуса, l – образующая конуса.

$V = \frac{1}{3}\pi h(r^2 + r_1^2 + rr_1)$ - объем усеченного конуса, где r, r_1 – радиусы оснований конуса, h – высота конуса.

Пример 1. $ABCA_1B_1C_1$ - прямая призма, в основании которой лежит прямоугольный треугольник ($\angle C = 90^\circ$), $AC = 6$ см – сторона треугольника, $\angle BAC = 45^\circ$. Вычислить площадь полной поверхности призмы, если ее объем равен 108 см^3 .

Решение: 1) $S_{полн} = S_{бок} + 2 S_{осн}$, $S_{бок} = Ph$, P – периметр основания, h – высота призмы; $S_{осн} = \frac{1}{2} AC \cdot BC$;

2) Рассмотрим $\triangle ABC$ - прямоугольный по условию, $\angle BAC = 45^\circ$, следовательно, $\triangle ABC$ - равнобедренный, $BC=AC=6$ см. $S_{осн} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18$

$$(\text{см}^2) \quad 2S_{осн} = 36 (\text{см}^2), \quad AB = \frac{AC}{\sin \angle ABC}, \quad AB = \frac{6}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 6\sqrt{2} (\text{см}).$$

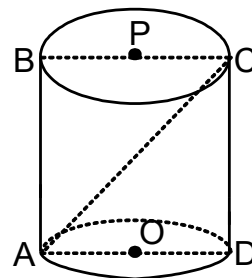
3) найдем периметр основания: $P = 2 \cdot 6 + 6\sqrt{2} = 12 + 6\sqrt{2}$ (см).

4) из формулы для вычисления объема прямой призмы выражаем высоту призмы и находим ее: $h = \frac{V}{S_{осн}}; h = \frac{108}{18} = 6$ (см).

$$5) S_{бок} = (12 + 6\sqrt{2}) \cdot 6 = 72 + 36\sqrt{2} (\text{см}^2).$$

$$6) S_{полн} = 72 + 36\sqrt{2} + 36 = 108 + 36\sqrt{2} (\text{см}^2).$$

Ответ: $108 + 36\sqrt{2}$ (см²).



Пример 2. Осевым сечением цилиндра является квадрат, диагональ которого равна $8\sqrt{2}$. Найти объем цилиндра.

Решение: 1) $V = S_{осн} h$;

2) Рассмотрим $\triangle ABC$ - прямоугольный, так как ABCD – квадрат. Пусть $AB=BC=x$, тогда по теореме Пифагора $x^2 + x^2 = (8\sqrt{2})^2$. Решая квадратное уравнение, получим $x=8$, то есть $h=8$ – высота цилиндра;

3) радиус основания: $r = \frac{1}{2} AD = 4$. Тогда $S_{осн} = \pi r^2$. $S_{осн} = 16\pi$;

4) $V = S_{осн} h = 128\pi$. Ответ: 128π ед³.

Требования к оформлению отчетного материала: оформить решение задач в тетради для практических работ (записать решение и ответ)

Форма контроля – фронтальный опрос, проверка тетрадей для практических работ.

Ссылки на источники: [1], [2]

Критерии оценки: указаны во введении