Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
ИРКУТСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
Факультет среднего профессионального образования

УТВЕРЖДАЮ:
Заместитель декана
по учебной работе
______________В. А. Махутова
«_04_» _03_ 2021 г.

ЕН.01 МАТЕМАТИКА

Методические указания
по выполнению практических работ

Специальность	40.02.01 Право и организация социального обеспечения
Квалификация	Юрист
Форма обучения	очная
Год набора	2021

2021 г.

Методические указания по выполнению практических работ по дисциплине ЕН.01 Математика составлены в соответствии с рабочей программой.

Составители:
Борходоева Александра Леонидовна, преподаватель

Методические указания рассмотрены и рекомендованы к утверждению на заседании цикловой комиссии математических и естественно-научных дисциплин
Протокол № 5 от «26» 02 2021 г.

Председатель ЦК ________________ А.Л. Борходоева

СОГЛАСОВАНО:
Начальник отдела по учебно-производственной работе/

______________ С.Р. Кононенко
«04» 03 2021 г.

Содержание

Введение

Целью практических работ является приобретение начальных практических навыков, формирование умений и получения знаний:

Умения

- решать задачи на отыскание производной сложной функции, производных второго и высших порядков (У.1).

применять основные методы интегрирования при решении задач (У.2);

применять методы математического анализа при решении задач прикладного характера, в том числе профессиональной направленности (У.3);

Знания

основные понятия и методы математического анализа (З.1);

основные численные методы решения прикладных задач (З.2);

Практические занятия способствуют развитию, формированию и становлению различных уровней составляющих компетентности обучающихся:

Код	**Наименование компетенций**
ОК 1.	Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
ОК 2.	Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
ОК 3.	Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
ОК 4.	Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
ОК 5.	Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
ОК 6.	Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
ОК 9.	Ориентироваться в условиях постоянного изменения правовой базы

Общее количество часов на практические работы по данной дисциплине – 10 часов.

Информационное обеспечение:

Основная литература

1. Богомолов, Н. В. Математика: учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/viewer/matematika-469433#page/1

2. Богомолов, Николай Васильевич. Практические занятия по математике. В 2 ч.: учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. - 11-е изд., перераб. и доп. - Москва: Юрайт, 2020. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-08800-7.Ч. 1. - 2020. - 325 с.: рис., табл. - Библиогр.: с. 322-325. - ISBN 978-5-534-08799-4: 825.74 р.

3. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2021. — 326 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08799-4. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/viewer/prakticheskie-zanyatiya-po-matematike-v-2-ch-chast-1-470650#page/1

4. Богомолов, Николай Васильевич**.** Практические занятия по математике. В 2 ч.: учебное пособие для СПО / Н. В. Богомолов. - 11-е изд., перераб. и доп. - Москва: Юрайт, 2020. - (Профессиональное образование). - ISBN 978-5-534-08800-7. Ч. 2. - 2020. - 250 с.: рис. - Библиогр.: с. 247-250. - ISBN 978-5-534-08803-8: 666.74 р.

5. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 2: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 251 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08803-8. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/viewer/prakticheskie-zanyatiya-po-matematike-v-2-ch-chast-2-470651#page/1

6. Абдуллина, К. Р. Математика: учебник для СПО / К. Р. Абдуллина, Р. Г. Мухаметдинова. — Саратов: Профобразование, 2021. — 288 с. — ISBN 978-5-4488-0941-5. — Текст: электронный // Электронный ресурс цифровой образовательной среды СПО

PROFобразование : [сайт]. — URL: https://profspo.ru/webreader/web/viewer.php?publicationId=books/99917

7. Юхно, Н. С. Математика: учебник / Н.С. Юхно. — Москва : ИНФРА-М, 2021. — 204 с. — (Среднее профессиональное образование). — DOI 10.12737/1002604. - ISBN 978-5-16-014744-4. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/read?id=375762

8. Богомолов, Н. В. Математика : учебник для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов, П. И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 401 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-07878-7. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/viewer/matematika-489612#page/1

9. Юхно, Н. С. Математика : учебник / Н.С. Юхно. — Москва : ИНФРА-М, 2022. — 204 с. — (Среднее профессиональное образование). — DOI 10.12737/1002604. - ISBN 978-5-16-014744-4. - Текст : электронный. - URL: https://znanium.com/read?id=379702

Дополнительная литература

1. Дадаян А. А. Математика: учебник / А.А. Дадаян. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : ИНФРА-М, 2019. — 544 с. — (Среднее профессиональное образование) / https://new.znanium.com/read?id=335845

2. Богомолов, Н. В. Алгебра и начала анализа: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 240 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09525-8. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/viewer/algebra-i-nachala-analiza-469825#page/1

3. Богомолов, Н. В. Геометрия: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 108 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09528-9. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/viewer/geometriya-469826#page/1

4. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 1: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/viewer/matematika-zadachi-s-resheniyami-v-2-ch-chast-1-470790#page/1

5. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 2: учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2021. — 320 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09135-9. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/viewer/matematika-zadachi-s-resheniyami-v-2-ch-chast-2-470791#page/1

6. Богомолов, Н. В. Алгебра и начала анализа : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 240 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09525-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/viewer/algebra-i-nachala-analiza-489977#page/1

7. Богомолов, Н. В. Геометрия : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 108 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09528-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/viewer/geometriya-489978#page/1

8. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 439 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09108-3. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/viewer/matematika-zadachi-s-resheniyami-v-2-ch-chast-1-490794#page/1

9. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 ч. Часть 2 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 320 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-09135-9. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/viewer/matematika-zadachi-s-resheniyami-v-2-ch-chast-2-490795#page/1

10. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 1 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В.

Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 326 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08799-4. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/viewer/prakticheskie-zanyatiya-po-matematike-v-2-ch-chast-1-490666#page/1

11. Богомолов, Н. В. Практические занятия по математике в 2 ч. Часть 2 : учебное пособие для среднего профессионального образования / Н. В. Богомолов. — 11-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2022. — 251 с. — (Профессиональное образование). — ISBN 978-5-534-08803-8. — Текст : электронный // Образовательная платформа Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/viewer/prakticheskie-zanyatiya-po-matematike-v-2-ch-chast-2-490667#page/1

Российские электронные ресурсы и базы данных

1. Электронная библиотека ИРНИТУ http://elib.istu.edu/
2. Образовательная платформа «Юрайт» https://urait.ru/
3. Научные электронные журналы на платформе eLIBRARY.RU http://elibrary.ru/
4. Электронная библиотека «Академия»: https://academia-library.ru/
5. Электронно-библиотечная система «Znanium.com»: http://znanium.com/
6. Электронно-библиотечная система «PRORFобразование»: http://profspo.ru/

Зарубежные электронные научные журналы и базы данных

1. База данных Springer Nature Experiments (ранее Springer Protocols): https://experiments.springernature.com/

Локальные базы данных

(*доступ из читальных залов библиотеки университета*)

1. Виртуальный читальный зал Президентской библиотеки им. Б.Н.Ельцина
2. Национальная электронная библиотека
3. Электронная справочная система «КонсультантПлюс»

Общие критерии оценки**:**

Оценка «5». Работа выполнена в полном объеме. В логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок.

Оценка «4». Работа выполнена в полном объеме и самостоятельно. Допущены недочёты в ходе решения, не влияющие на правильность конечного результата.

Оценка «3». Практическая работа выполнена и оформлена обучающимися при помощи преподавателя. Обучающиеся показывают знания теоретического материала, но испытывают затруднение при выполнении заданий.

Оценка «2» выставляется в том случае, когда обучающийся не подготовлен к выполнению этой работы. Показывается плохое знание теоретического материала и отсутствие необходимых умений.

Таблица – Перечень практических работ

№	Тема	Вид, номер и название работы	Коды общих и профессиональных компетенций	Количество часов
Семестр 3				
	Раздел 1. Математический анализ			
	Тема 1.2. Дифференциальное исчисление	Практическая работа № 1. Отыскание производной сложной функции, производных второго и высших порядков	ОК 5	2
	Тема 1.2. Дифференциальное исчисление	Практическая работа № 2. Нахождение экстремумов, промежутков монотонности, точек перегиба, промежутков выпуклости функций. Вычисление наибольшего и наименьшего значения функций.	ОК 9	2
	Тема 1.3. Интегральное исчисление	Практическая работа № 3. Интегрирование при решении задач	ОК 3.	2
	Раздел 2. Основы теории вероятности и математической статистики			
	Тема 2.1. Основы	Практическая работа	ОК 6, ОК 7.	2

	теории вероятности	№ 4. Решение задач на нахождение функции распределения дискретной случайной величины, вычисление математического ожидания и дисперсии случайной величины		
	Тема 2.2. Математическая статистика	Практическая работа № 5. Решение задач	ОК 6.	2
	Итого:			10

Практическая работа №1.
Отыскание производной сложной функции, производных второго и высших порядков

Количество часов на выполнение: 2 ч
Цель работы: Отработать навыки дифференцирования сложных функций.
Оборудование: рабочая тетрадь, ручка
Задание: Найти производные сложных функций.
Методика выполнения задания:
Изучите теоретический материал по данной теме.
Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
Выполните задания по вариантам.

1.Теоретический материал

Определение. Пусть задана функция $f(x),\ x \in (a,b)$, и пусть x_0- некоторая точка интервала (a,b). Предел $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$. То есть $f'(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Функция, имеющая производную в некоторой точке, называется дифференцируемой в этой точке.

Основные правила дифференцирования

Если С - постоянное число, $U=U(x)$, $V=V(x)$ – функции, имеющие производные, тогда:

$C'=0$ (I);

$(U\pm V)'=U'\pm V'$ (II);

$(C\cdot U)'=C\cdot U'$ (III);

$(U\cdot V)'=U'V+UV'$ (IV);

$\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-UV'}{V^2}$ (V).

Если $y = f(u)$, $U = \varphi(x)$ – дифференцируемые функции от своих аргументов, то производная сложной функции $y=f[(\varphi(x)]$ существует и равна произведению данной функции по промежуточному аргументу на производную этого аргумента по независимой переменной x, т.е.

$y'=f'(U)\cdot U'$ (VI).

Формулы дифференцирования

При условии $u=\varphi(x)$	При условии $u=x$
	$C'=0,\ C\equiv const$
	$x'=1$
$(u^n)'=nu^{n-1}u'$, n – любое действительное число	$(x^n)'=nx^{n-1}$, n – любое действительное число
$\left(\frac{1}{u}\right)'=-\frac{1}{u^2}u'$	$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$
$\left(\sqrt{u}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{u}}u'$	$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$(\ln u)'=\frac{1}{u}u'$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$\left(a^u\right)'=a^u\ln a u'$	$\left(a^x\right)'=a^x\ln a$
$\left(e^u\right)'=e^u u'$	$\left(e^x\right)'=e^x$
$(\sin u)'=\cos u\cdot u'$	$(\sin x)'=\cos x$
$(\cos u)'=-\sin u\cdot u'$	$(\cos x)'=-\sin x$
$(tgu)'=\frac{1}{\cos^2 u}u'$	$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u}u'$	$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$ $\|u\|<1$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $\|x\|<1$
$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$ $\|u\|<1$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\mathrm{arc}\,tgu)' = \frac{1}{1+u^2}u'$	$(\mathrm{arc}\,tgx)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\mathrm{arc}\,ctgu)' = -\frac{1}{1+u^2}u'$	$(\mathrm{arc}\,ctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

2. Типовые задания

Пример 1. Вычислите производную функции $f(x) = -2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x$.

Решение: Воспользуемся формулами и правилом дифференцирования вычисления производных:

$$f'(x) = \left(-2x^2 - \frac{1}{3}x^3 + 5x\right)' = -2\cdot 2x^{2-1} - \frac{1}{3}\cdot 3x^{3-1} + 5\cdot 1x^{1-1} = -4x - x^2 + 5.$$

Пример 2. Вычислите производную функции $f(x) = \sqrt{x}(x-3)$.

Решение: *В*оспользуемся формулами и правилами дифференцирования вычисления производных:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}(x-3)\right)' = \left(\sqrt{x}\right)'(x-3) + \sqrt{x}(x-3)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x}\cdot 1.$$

Приведем дроби к общему знаменателю:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x-3) + \sqrt{x} = \frac{x-3+2x}{2\sqrt{x}} = \frac{3x-3}{2\sqrt{x}}.$$

Пример 3. Найти производную функции $f(x) = \sqrt{4-x^2}$.

Решение: Полагая $u = \sqrt{4-x^2}$, получим $f(x) = \sqrt{u}$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{4-x^2}}(4-x^2)' = \frac{-2x}{2\sqrt{4-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

Пример 4. Найти производную функции $f(x) = \sin^3 3x$.

Решение: Полагая $3x = u$, получим $f(x) = \sin^3 u$. Применяя правило вычисления производной сложной функции, имеем

$$f'(x)=(\sin^3 u)'=3\sin^2 u(\sin u)'=3\sin^2 3x\cos 3x(3x)'=3\sin^2 3x\cdot\cos 3x\cdot 3=$$
$$9\sin^2 3x\cdot\cos 3x.$$

Пример 5. Найти производную функции $f(x)=\arccos\sqrt{2x}$.
Решение:

$$f'(x)=(\arccos\sqrt{2x})'=-\frac{1}{\sqrt{1-(\sqrt{2x})^2}}(\sqrt{2x})'=-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2x}}\cdot 2=$$
$$=-\frac{1}{\sqrt{1-2x}}\frac{1}{\sqrt{2x}}=-\frac{1}{\sqrt{2x(1-2x)}}.$$

Пример 6. Найти производные функций $y=\sqrt[3]{x}\left(e^{3x}-5\right)/$

Решение: Данная функция представляет произведение двух функций, поэтому на основании формулы (IV)

$$y'=\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'\cdot\left(e^{3x}-5\right)+x^{\frac{1}{3}}\cdot\left(e^{3x}-5\right)'=\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(e^{3x}-5\right)+3e^{3x}\cdot x^{\frac{1}{3}}=$$
$$=\frac{\left(e^{3x}-5\right)}{3\sqrt[3]{x^2}}+3e^{3x}\cdot\sqrt[3]{x}=\frac{e^{3x}-5+9e^{3x}\cdot x}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}}=\frac{e^{3x}\left(9x+1\right)-5}{3\cdot\sqrt[3]{x^2}};$$

3. Задания по вариантам

Вычислите значение сложной производной в указанной точке:

Вариант 1	Вариант 2
1) $f(x)=\sin^2 x;\ \ f'(\pi/4);$ 2) $f(x)=\ln\cos x;\ \ f'(-\pi/3);$ 3) $f(x)=\sin 2x-\cos^2 x;\ \ f'(0);$ 4) $f(x)=\ln tgx;\ \ f'(\pi/4);$ 5) $f(x)=e^{\sin x};\ \ f'(0).$ 6) $f(x)=\ln\cos^2 2x;\ \ f'(\pi/8);$ 7) $f(x)=\sin^4 x+\cos^4 x; f'(\pi/4);$	1) $f(x)=\cos^2 x;\ \ f'(-\pi/4);$ 2) $f(x)=\ln\sin x;\ \ f'(\pi/6);$ 3) $f(x)=\sin^2 x+\cos 2x;\ \ f'(0);$ 4) $f(x)=\ln ctgx;\ \ f'(-\pi/4);$ 5) $f(x)=e^{\cos 2x}; f'(\pi/4).$ 6) $f(x)=\ln\sqrt{\cos 2x};\ \ f'(\pi/8);$ 7) $f(x)=\ln tg2x;\ \ f'(\pi/8);$
Вариант 3 1) $f(x)=\ln\sin^2 x;\ \ f'(\pi/4);$ 2) $f(x)=\cos^2 x^2;\ \ f'(\sqrt{\pi}/2);$ 3) $f(x)=2\sin^2 x\cos x;\ \ f'(\pi/2);$ 4) $f(x)=tg^2 3x;\ \ f'(0);$ 5)) $f(x)=\ln\sqrt{tg3x};\ \ f'(\pi/12);$ 6) $f(x)=e^{\sin 2x}-3e^{\cos 2x}; f'(0).$	Вариант 4 1) $f(x)=-2\sin^2 x;\ \ f'(-\pi/4);$ 2) $f(x)=\ln\cos x;\ \ f'(\pi/3);$ 3) $f(x)=2\sin 2x+3\cos 3x;\ \ f'(0);$ 4) $f(x)=\ln tgx;\ \ f'(\pi/4);$ 5) $f(x)=e^{-2\sin x};\ \ f'(0).$ 6) $f(x)=\ln\sqrt{\sin x};\ \ f'(\pi/8);$

7) $f(x) = arctg\sqrt{x};\ \ f'(1/4);$	7) $f(x) = \cos^4 3x;\ \ f'(\pi/6);$
Вариант 5 1) $f(x) = \ln\cos^2 4x;\ \ f'(\pi/16);$ 2) $f(x) = 4\cos^2 x; f'(\pi/4);$ 3) $f(x) = 4\sin^5 2x;\ \ f'(\pi/8);$ 4) $f(x) = \ln tg 3x;\ \ f'(\pi/12);$ 5) $f(x) = e^{\sin x} + e^{\cos x}; f'(\pi/2).$ 6) $f(x) = 5\arccos\sqrt{x}; f'(1/2).$ 7) $f(x) = e^{\cos 2x} - 2e^{\sin 2x}; f'(\pi/4).$	Вариант 6 1) $f(x) = \ln tg^2 2x;\ \ f'(\pi/24);$ 2) $f(x) = \cos^3 x; f'(\pi/4);$ 3) $f(x) = \sin^4 x - \cos^4 x;\ \ f'(\pi/4);$ 4) $f(x) = e^{-\sin x} - e^{-\cos x}; f'(\pi/2);$ 5) $f(x) = \ln\sqrt{\sin x}; f'(\pi/4).$ 6) $f(x) = \arcsin 4x + e^{3x};\ \ f'(0);$ 2) $f(x) = \sin^4 6x; f'(\pi/3);$

Требования к оформлению отчетного материала: оформленное решение задач в тетради.
Форма контроля: фронтальный опрос, проверка тетрадей.
Ссылки на источники: [1], [2], [3]
Критерии оценки: указаны во введении.

Практическая работа №2.
Нахождение экстремумов, промежутков монотонности, точек перегиба, промежутков выпуклости функций. Вычисление наибольшего и наименьшего значения функций

Количество часов на выполнение: 2 ч
Цель работы: Научить применять обобщенную схему исследования для дробно-рациональных функций и построение графиков функций по данным исследования.
Оборудование: рабочая тетрадь, ручка
Задание: Исследовать и построить график функций.
Методика выполнения задания:
Изучите теоретический материал по данной теме.
Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
Выполните задания по вариантам.

1. Теоретический материал

Общая схема построения графиков функции
1) Найти область определения функции.
2) Выяснить, не является ли функция чётной, нечётной или периодической.
3) Найти точки пересечения графика с осями координат (если это не вызывает затруднения).

4) Найти интервалы знакопостоянства функции.
5) Асимптоты графика функции.
6)Найти промежутки монотонности функции и её экстремумы.
7) Найти промежутки выпуклости графика функции и точки перегиба.
8) Построить график, используя полученные результаты исследования.
Правила нахождения экстремумов функции y=f(x) с помощью первой производной.

Найти производную $f'(x)$.Найти критические точки функции $y=f(x)$, т.е. точки в которых $f'(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Исследовать знак производной $f'(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. При этом критическая точка x_0 есть **минимума**, если она отделяет промежуток, в котором $f'(x)<0$, от промежутка, в котором $f'(x)>0$, и точка **максимума** – в противном случае. Если же в соседних промежутках, раздельной критической точкой x_0, знак производной не меняется, то в точке x_0 функция экстремума не имеет.
Вычислить значения функции в точках экстремума.

Определение: Прямая $y=kx+b$ называется асимптотой графика функции f(x) при $x \to \infty$, если $\lim_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$

где $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$.
Аналогично определяется и находится асимптота графика функции f(x) при $x \to -\infty$.

Определение: Прямая $x=a$ называется вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$, если

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \pm\infty$$

или

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \pm\infty$$

Для нахождения наименьшего и наибольшего значений функции, непрерывной в некотором промежутке, необходимо:
1) Найти критические точки, принадлежащие заданному промежутку, и вычислить значения функции в этих точках;
2) Найти значения функции на концах промежутка;
3) Сравнить полученные значения; тогда наименьшее и наибольшее из них являются соответственно наименьшим и наибольшим значениями функции в рассматриваемом промежутке.

2. Типовые задания

Пример 1. Исследовать функцию $y = \frac{x^2}{x-3}$ и построить ее график.

Решение:

1.Находим область определение функции *D(y)*= $(-\infty;\ 3) \cup (3;\ +\infty)$.

2. Данная функция не является нечётной, ни нечётной, ни периодической.

3. При $x=0$ получим $y=0$, т.е. график проходит через начало координатой.

4. Так как $\lim_{x\to 3\pm 0} f(x) = \pm\infty$, то прямая **x=**3 служит вертикальной асимптотой графика.

Далее находим: $$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2}{x(x-3)} = 1,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} [\frac{x^2}{x(x-3)} - x] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x}{x-3} = 3.$$

Следовательно, прямая y=x+3 является наклонной асимптотой графика.

5. Находим: $$y' = \frac{2x(x-3) - x^2}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x}{(x-3)^2} = \frac{x(x-6)}{(x-3)^2}.$$

Производная y' обращайся в нуль в точках $x=0$ и $x=6$ и терпит разрыв при $x=3$. Этими точками числовая прямая делится на четыре промежутка: $-\infty<x<0,\ 0<x<3,\ 3<x<6$ *и* $6<x<+\infty$. Исследуем значок y' в каждом из них; очевидно, что $y'>0$ в промежутках $-\infty<x<0,\ 0<x<3,\ 3<x<6$ *и* $6<x<+\infty$.

Исследуем знак y' в каждом в каждом из них; очевидно, что $y'>0$ в промежутках $-\infty<x<0$ и $6<x<+\infty$ (в этих промежутках функция убывает). При переходе через точку $x=0$ производная меняет знак с плюса на минус т.е. эта точка максимума, а при переходе через $x=6$ – с минуса на плюс, т.е эта точка минимума. Находим:

$y_{\max} = y(0) = 0$, $y_{\max} = y(6) = 12$

6. Находим

$$y''(x) = \frac{(2x-6)(x-2)^2 - 2(x-3)(x^2-6x)}{(x-3)^4} = \frac{18}{(x-3)^3}$$

Вторая производная в нуль нигде не обращается и терпит разрыв при $x=3$. В промежутке $-\infty<x<3$ имеет $y'<0$, т.е. в этом промежутке кривая выпукла вверх; в промежутке $3<x<+\infty$ имеет $y'>0$, т.е. в этом промежутке кривая выпукла вниз. Точек перегиба нет.

7. На основании полученных данных строим график функции (рис 2).

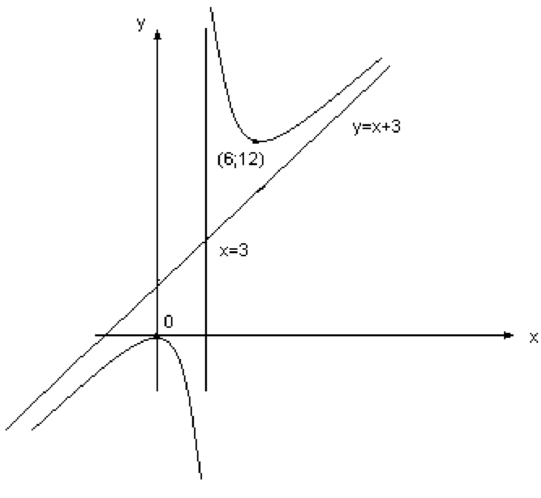

Рис. 2

Пример 2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x + 2x^2 + \frac{1}{3}x^3$ на промежутке *[-2; 0]*.

Решение: Вычислим критические точки функции, принадлежащие заданному промежутку, с помощью первой производной:

$y' = 3 + 4x + x^2;$

$x^2 + 4x + 3 = 0;$

$D = 16 - 12 = 4;$

$x_{1,2} = \frac{-4 \pm 2}{2}$;

$x_1 = -1; \qquad x_2 = -3.$

Т.к. $-3 \notin [-2;\ 0]$, $x=-1$ – критическая точка.

$y(-1) = 3(-1) + 2(-1)^2 + \frac{1}{3}(-1)^3 = -3 + 2 - \frac{1}{3} = -1\frac{1}{3}$, $\underline{y(-1) = -1\frac{1}{3}}$.

Вычислим значения функции на концах промежутка:

$y(-2) = 3(-2) + 2(-2)^2 + \frac{1}{3}(-2)^3 = -6 + 8 - \frac{8}{3} = 2 - 2\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}$, $\underline{y(-2) = -\frac{2}{3}}$.

$\underline{y(0)=0}$.

Сравним полученные значения: *наименьшее значение функции равно* $-1\frac{1}{3}$ и достигается ею во внутренней точке промежутка, а наибольшее значение равно 0 и достигается на правом конце промежутка.

3.Задания по вариантам

Вариант 1

Задание 1. Исследовать функцию и построить график:

$y = \frac{x}{x^2 - 4}$;

Задание 2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функций в заданных промежутках $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3$ на промежутке [1; 3].

Вариант 2

Задание 1. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{x^2-4}{x}$$

Задание 2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функций в заданных промежутках $y=6x^2-x^3$ на промежутке [-1; 6].

Вариант 3

Задание 1. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{1}{x^2-7x+12}$$

Задание 2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функций в заданных промежутках $y=x^3-3x^2-9x+35$ на промежутке [-4; 4].

Вариант 4

Задание 1. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{(x+1)(x+8)}{x}$$

Задание 2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функций в заданных промежутках $y=-24x+9x^2-x^3+10$ на промежутке [0; 3].

Вариант 5

Задание 1. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{x^3}{x^2-1}$$

Задание 2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функций в заданных промежутках $y=x-2x^2+\frac{1}{3}x^3$ на промежутке [-4; -1].

Вариант 6

Задание 1. Исследовать функцию и построить график:

$$y=\frac{6-x^3}{x^2}$$

Задание 2. Найдите наименьшее и наибольшее значения функций в заданных промежутках $y=\frac{3}{5}x-\frac{2}{5}x^2-\frac{1}{3}x^3$ на промежутке [-3; 1].

Требования к оформлению отчетного материала: оформленное решение задач в тетради.

Форма контроля: фронтальный опрос, проверка тетрадей.

Ссылки на источники: [1], [2], [3]
Критерии оценки: указаны во введении.

Практическая работа №3.
Интегрирование при решении задач

Количество часов на выполнение: 2 ч
Цель работы: Отработать навыки решения прикладных задач с помощью определенного интеграла.
Оборудование: рабочая тетрадь, ручка, карандаш, линейка
Задание: Решить задачи на геометрические и физические приложения определенного интеграла.
Методика выполнения задания:
Изучите теоретический материал по данной теме.
Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
Выполните задания по вариантам.

1. Теоретический материал

Определенный интеграл находит широкое применение при решении физико-технических задач различного характера. С его помощью можно вычислить работу, производимую силой; давление жидкости; путь, пройденный телом; центр тяжести фигуры; объемы тел по площадям сечений и многие другие величины.
При всем их разнообразии эти задачи объединяет общность метода решения, а именно: во всех задачах необходимо вычислить предел суммы растущего числа малых слагаемых.
Применение определенного интеграла к решению задач прикладного характера проводится по следующим правилам.
Выбирают независимую переменную, искомую величину разбивают на как угодно малые части, постепенно увеличивая их число так, что величина каждой стремится к нулю.
Отбрасывая, бесконечно малые более высокого порядка малости, заменяют каждую из бесконечно малых частей искомой величины эквивалентной, так называемой элементарной, ее частью $f(x)\Delta x$.
Независимая переменная изменяется в пределах от *a* до *b*, и потому искомая величина равна $\lim_{\Delta x\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)\Delta x = \int_a^b f(x)dx$.

2. Типовые задания. Решение прикладных задач

Вычисление работы, производимой силой.
Работа, произведенная переменной силой *f(x)* при перемещении по оси 0х материальной точки от *x=a* до *x=b,* находится по формуле $A = \int_a^b f(x)\,dx$.

Пример 1. Сжатие x винтовой пружины, пропорционально приложенной силе F. Вычислить работу силы F при сжатии пружины на 0,04 м, если для сжатия ее на 0,01 м нужна сила 10 Н.
Решение: т.к. x=0,01$м$ при F=10H, то, подставляя эти значения в равенство $F=kx$, получим 10=0,01k, откуда k=1000 $H/м$.
Подставив теперь в это же равенство значение k, находим F=1000x, т.е. $f(x)$=1000x. Искомую работу найдем по формуле $A=\int\limits_a^b f(x)dx$, полагая a=0, b=0,04:

$$A=\int\limits_0^{0,04} 1000x\,dx=\left(\frac{1000x^2}{2}\right)\Bigg|_0^{0,04}=500x^2\Big|_0^{0,04}=500\cdot 0,04^2=0,8\ (Дж).$$

Пример 2. Найти работу, необходимую для выкачивания воды из бассейна, имеющего форму полуцилиндра, длина которого a=25 м, а радиус R=20 м.
Решение. Примем за x высоту, на которую надо поднять воду, чтобы выкачать ее из бассейна. Разобьем объем бассейна на слои, параллельные поверхности воды, толщина которых dx, длина a, ширина $2\sqrt{R^2-x^2}$. Назовем их элементарными слоями. Объем элементарного слоя, находящегося на глубине x, $dV=2a\sqrt{R^2-x^2}$.
Для подъема этого слоя воды на высоту x необходимо выполнить элементарную работу $dA=\rho gxdV=2\rho gxa\sqrt{R^2-x^2}d,$ $где\ \rho$ – плотность воды.
Значит, вся работа по выкачиванию воды из бассейна

$$A=2a\rho g\int_0^R x\sqrt{R^2-x^2dx}=-a\rho g\left(\frac{2}{3}(R^2-x^2)^{\frac{2}{3}}\right)\Big|_0^R=\frac{2}{3}\rho gaR^3$$

$$=\frac{2}{3}\rho g25\cdot 20^3=\frac{400000}{3}\rho g$$

При решении задач на вычисление работы силы часто используется закон Гука: $F = kx$, где F – сила, H; x – абсолютное удлинение пружины, $м$, вызванное силой F; k – коэффициент пропорциональности, $Н/м$.
Пример 3. Вычислить работу силы F при сжатии винтовой пружины на 0,04м, если для сжатия ее на 0,01м нужна сила 10 Н.
Решение: Так как $x = 0{,}01м$ при $F = 10\ Н$, то по закону Гука $10 = k\cdot 0{,}01$, откуда $k = 1000\ Н/м$. Значит $F = 1000\ k$, т.е. $f(x) = 1000\ x$. Искомую работу найдем по формуле A = $\int_a^b f(x)\,dx$, полагая $a = 0,\ b = 0{,}04$;

A = $\int_0^{0,04} 1000x\,dx$ = $500x^2|_0^{0,04}$ = 0,8 Дж.

Вычисление пути, пройденного материальной точкой.
Путь, пройденный точкой при неравномерном движении по прямой с переменной скоростью $v=f\ (t)>0$ за промежуток времени от t_1 до t_2, вычисляется по формуле $S=\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$.

Пример 4. Скорость движения точки изменяется по закону $V=(3t^2+2t+1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10 секунд от начала движения.

Решение: согласно условию, $f\ (t)\ =3t^2+2t+1$, $t_1=0$, $t_2=10$. По формуле $S=\int\limits_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ находим

$$S=\int\limits_0^{10}(3t^2+2t+1)dt=\left(\frac{3t^3}{3}+\frac{2t^2}{2}+t\right)\Bigg|_0^{10}=\left(t^3+t^2+t\right)\Big|_0^{10}=10^3+10^2+10=1110\ \ (м).$$

Пример 5. Найти путь, пройденный материальной точкой за 10 секунд от начала движения со скоростью $\upsilon = 0{,}1\ t^3$ м/с.

Решение: $S = \int_0^{10} 0{,}1\ t^3\,dt\ = 0{,}1\frac{t^4}{4}\ |_0^{10} = 0{,}1\ \frac{10\,000}{4}\ -\ 0 = 250$м.

3. Задания по вариантам

Вариант 1

Задание 1. Сделайте чертёж и вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси **ОХ** фигуры, ограниченной данными линиями:
y^2-3x=0 и x-3=0.

Задание 2.Скорость движения точки по закону $v = (3t^2 + 2t + 1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой за 10 секунд от начала движения.

Задание 3.Вычислить работу, необходимую для выкачивания воды из полусферического сосуда, диаметр которого 20м.

Задание 4.Найдите площади фигур, ограниченных линиями:
$y=x^2+x+6$ и $y=0$;
$y=x^2-8x+18$, $y=-2x+18$.

Вариант 2

Задание 1. Сделайте чертёж и вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси **ОУ** фигуры, ограниченной данными линиями:
x^2-2y=0, y-2=0.

Задание 2. Скорость движения точки $v=(9t^2 - 8t)$ м/с. Найти путь, пройденной точкой за четвертую секунду.

Задание 3. Цилиндрическая цистерна с радиусом основания 0,5 м и высотой 2 м заполнена водой. Вычислить работу, которую необходимо произвести, чтобы выкачать воду из цистерны.

Задание 4. Найдите площади фигур, ограниченных линиями:
$y=-x^2+2x+3$ и $y=0$;
в) $y=-x^2+10x-16$, $y=x+2$

Вариант 3

Задание 1. Сделайте чертёж и вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси ОУ фигуры, ограниченной данными линиями: $y=x^2+1$, y=2, y=5;

Задание 2. Скорость движения точки $v = (12t - 3t^2)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой от начала движения до ее остановки.
Задание 3. При сжатии пружины на 0,05 м затрачивается работа 25 Дж. Какую работу необходимо совершить, чтобы сжать пружину на 0,1м?
Задание 4. Найдите площади фигур, ограниченных линиями:
$y=x^2-2x$ *и* $y=0$; $y=x^2$,
$y=0, x=0$ *и* $x=3$.
Вариант 4
Задание 1. Сделайте чертёж и вычислите объём тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной данными линиями: $xy=1$, $x=2, x=3, y=0$.
Задание 2. Скорость движения точки по закону $v = (3t^2 + 2t + 1)$ м/с. Найти путь, пройденный точкой эа 10 секунд от начала движения.
Задание 3. Для растяжения пружины на 0,04 м необходимо совершить работу 20 Дж. На какую длину можно растянуть пружину, совершив работу 80 Дж?
Задание 4. Найдите площади фигур, ограниченных линиями:
$y=-x^2+2x$ *и* $y=0$;
$y=3x^2$, $y=0, x=-3$ *и* $x=2$

Требования к оформлению отчетного материала: оформленное решение задач в тетради.
Форма контроля: фронтальный опрос, проверка тетрадей.
Ссылки на источники: [1], [2], [3]
Критерии оценки: указаны во введении.

Практическая работа №4
Решение задач на нахождение функции распределения дискретной случайной величины, вычисление математического ожидания и дисперсии случайной величины

Количество часов на выполнение: 2 ч
Цель работы: закрепление теоретического материала по изучению случайной величины и её функции распределения, математического ожидания дискретной случайной величины и дисперсии случайной величины.
Оборудование: рабочая тетрадь, ручка, калькулятор
Задание: Решить задачи
Методика выполнения задания:
Изучите теоретический материал по данной теме.
Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
Выполните задания по вариантам.

1. Теоретический материал
Функция распределения ДСВ

Случайная дискретная величина может быть задана перечнем всех ее возможных значений и их вероятностей. Такой способ задания не является общим: он не применим, например, для случайных непрерывных величин.

Действительно, рассмотрим случайную величину X, возможные значения которой сплошь заполняют интервал *(a, b)*. Можно ли составить перечень всех возможных значений X? Очевидно, что этого сделать нельзя. Этот пример указывает на целесообразность дать общий способ задания любых типов случайных величин. С этой целью и вводят функции распределения вероятностей случайной величины.

Пусть x - действительное число. Вероятность события, состоящего в том, что X примет значение, меньшее x, т. е. вероятность события $X < x$, обозначим через $F(x)$. Разумеется, если x изменяется, то, изменяется и $F(x)$. Итак, $F(x)$ - функция от x.

Функцией распределения называют функцию F(x), определяющую вероятность того, что случайная величина X в результате испытания примет значение, меньшее x, или

$$F(x)=P(X<x)$$

С геометрической точки зрения $F(x)$ есть вероятность того, что случайная величина примет значение, которое изображается на числовой оси точкой, лежащей левее точки x.

Иногда вместо термина «функция распределения» используют термин «интегральная функция».

Теперь можно дать более точное определение случайной непрерывной величины.

Случайную величину называют *непрерывной,* если ее функция распределения есть непрерывная, кусочно-дифференцируемая функция с непрерывной производной.

Свойства функции распределения

Свойство 1. Значения функции распределения принадлежат отрезку [0;1]: $0 \leq F(x) \leq 1$.

Свойство 2. F (x) — неубывающая функция, т. е. $F(x_2) \geq F(x_1)$, если $x_2 > x_1$

Следствие 1. Вероятность того, что случайная величина примет значение, заключенное в интервале (a, b), равна приращению функции распределения на этом интервале;

$$P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a).$$

Следствие 2. Вероятность того, что случайная непрерывная величина X примет одно определенное значение, равна нулю.

Замечание. При рассмотрении функции распределения, промежуток можно записывать в виде $[x_1; x_2]$, тогда:

$p(x_1 \leq x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.- что более понятно и привычно.

Не представляет интереса говорить о вероятности того, что случайная непрерывная величина примет одно определенное значение, но имеет смысл рассматривать вероятность попадания ее в интервал, пусть даже сколь угодно малый. Этот факт полностью соответствует требованиям практических задач.

Например, интересуются вероятностью того, что размеры деталей не выходят за дозволенные границы, но не ставят вопроса о вероятности их совпадения с проектным размером.

Заметим, что было бы неправильным думать, что равенство нулю вероятности *P (X=x)* означает, что событие *X* = x, невозможно (если, конечно, не ограничиваться классическим определением вероятности). Действительно, в результате испытания случайная величина обязательно примет одно из возможных значении; в частности, это значение может оказаться равным x_1.

Свойство 3. Пусть возможные значения случайной величины принадлежат интервалу (*a;b*). Тогда верны утверждения

$F(x) = 0$ при $x \le a$; $F(x) = 1$ при $x > b$.

Следствие. Если возможные значения случайной непрерывной величины расположены на всей оси x, то справедливы следующие предельные утверждения:

- При *x* стремящемуся к минус бесконечности, предел *F(x)* равен 0.
- При *x* стремящемся к плюс бесконечности, предел *F(x)* равен 1.

Аналитическое и графическое задание функции распределения

Функция распределения случайной дискретной величины состоит из нескольких кусков, поэтому ее график имеет ступенчатый вид. Покажем это при решении задач.

Задание . Найти функцию распределения и вычертить ее график.

1. Случайная дискретная величина X задана таблицей распределения

X	1	4	8
P	0,3	0,1	0,6

Решение. Если $x \le 1$, то F(x) = 0 (третье свойство).

Если $1 < x \le$; 4, то F(x) = 0,3.

Если $4 < x \le 8$, то F (x) = 0,3+0,1=0,4. Это следует из того, что эти два события несовместны, то по теореме сложения вероятность события X равна сумме вероятностей.

Если x > 8, то F(x) = 1 Действительно, событие $X \le 8$ достоверно, следовательно, его вероятность равна единице.

Функция распределения задана аналитически и графически

Математическим ожиданием M(X) дискретной случайной величины X называется сумма произведений всех ее возможных x_i на их вероятности p_i:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + \cdots + x_n p_n = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

Отклонением называется разность между случайной величиной X и ее математическим ожиданием M(X), т.е. X-M(X).

Дисперсией дискретной случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X) = M(X - M(X))^2$$

Для вычисления дисперсий более удобной является формула

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2$$

2. Типовые задания

Пример 1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	-8	-4	-1	1	3	7
p	1/12	1/6	1/4	1/6	1/12	1/4

Решение:

$$M(X) = -8 \cdot \frac{1}{12} - 4 \cdot \frac{1}{6} - 1 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{12} + 7 \cdot \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$$

Пример 2. Найти дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по закону:

X	-1	0	1	2
p	0,2	0,1	0,3	0,4

Решение:

Сначала найдем математическое ожидание

$$M(X) = -1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 2 \cdot 0{,}4 = 0{,}9\ ,$$

а затем

$$M(X^2) = 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}3 + 4 \cdot 0{,}4 = 2{,}1$$

Теперь находим дисперсия:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X) = 2{,}1 - 0{,}81 = 1{,}29$$

3. Задания по вариантам

Вариант 1

Задание 1.

Случайная величина X задана функцией распределения

$$\begin{cases} 0 \text{ при } x < -1 \\ \frac{3}{4}x + \frac{3}{4} \text{ при } -1 < x < \frac{1}{3} \\ 1 \text{ при } x > \frac{1}{3} \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале (0, 1/3).

Задание 2.

Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	-2	-1	0	1	2	3
p	1/6	1/6	1/12	1/3	0	1/4

Задание 3.

Случайная величина задана следующим рядом распределения.

X	-1	0	1	2
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти дисперсию этой величины.

Задание 4.
Найти математические ожидания и дисперсии следующих случайных величин, заданных своими таблицами распределения:

X	1	3	4	6	7
P	0,1	0,1	0,3	0,4	0,1

X	50	100	150	200	250
P	0,1	0,5	0,3	0,04	0,06

Вариант 2

Задание 1.
Случайная величина X задана функцией распределения

$$\begin{cases} 0 \text{ при } x < 6 \\ (x-6)2 \text{ при} 6 < x < 7 \\ 1 \text{ при } x > 7 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала (7,4; 7,7).
Задание 2.
Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, зная закон её распределения.

X	-1	0	1	2	3
p	0,05	0,2	0,4	0,3	0,05

Задание 3.
Найти дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по закону

X	0	1	2	3	4
p	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Задание 4.
Найти математические ожидания и дисперсии следующих случайных величин, заданных своими таблицами распределения:

X	-2	-1	0	1	2
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

X	100	150	200	300	350
P	0,4	0,3	0,2	0,05	0,05

Вариант 3

Задание 1.
Случайная величина X задана функцией распределения

$$\begin{cases} 0 \text{ при } x < -2 \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} arcsin\frac{x}{2} \text{ при } -2 < x < 2 \\ 1 \text{ при } x > 2 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение, заключенное в интервале (-1; 1).

Задание 2.
Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

X	-4	-2	-1	0	1	3
p	1/6	1/6	1/12	1/3	0	1/4

Задание 3.
Случайная величина задана следующим рядом распределения.

X	-2	-1	1	2
p	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти дисперсию этой величины.
Задание 4.
Найти математические ожидания и дисперсии следующих случайных величин, заданных своими таблицами распределения:

X	2	3	5	6	8
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

X	40	80	100	150	200
P	0,1	0,5	0,3	0,04	0,06

Вариант 4

Задание 1.
Случайная величина X задана функцией распределения

$$\begin{cases} 0 \text{ при } x < 16 \\ (x-5)2 \text{ при } 16 < x < 27 \\ 1 \text{ при } x > 27 \end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания X примет значение из интервала (17,4; 27,7).

Задание 2.
Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, зная закон её распределения.

X	-3	-1	0	2	4
p	0,05	0,2	0,4	0,3	0,05

Задание 3.
Найти дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по закону

X	-1	0	1	2	3
p	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

Задание 4.
Найти математические ожидания и дисперсии следующих случайных величин, заданных своими таблицами распределения:

X	-3	-1	0	2	4
P	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

X	50	100	250	300	350
P	0,4	0,3	0,2	0,05	0,05

Требования к оформлению отчетного материала: оформленное решение задач в тетради.
Форма контроля: фронтальный опрос, проверка тетрадей.
Ссылки на источники: [1], [3]
Критерии оценки: указаны во введении.

Практическая работа №5

Решение задач

Количество часов на выполнение: 2 ч
Цель работы: обучение решению задач математической статистики, обработки данных и интерпретации результатов.
Оборудование: рабочая тетрадь, ручка, калькулятор
Задание: Решить задачи
Методика выполнения задания:
Изучите теоретический материал по данной теме.
Ознакомьтесь с типовыми заданиями.
Выполните задания по вариантам.

1. Теоретический материал

Для выборки можно определить ряд числовых характеристик, аналогичных тем, что в теории вероятности определялись для случайных величин.
Пусть статистическое распределение выборки объема n имеет вид

x_i	x_1	x_2	x_3	...	x_k
n_i	n_1	n_2	n_3	...	n_k

Выборочным средним $\overline{x_в}$ называется среднее арифметическое всех значений выборки:

$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i n_i$ (1)

Выборочное среднее можно записать и так

$\overline{x_в} = \sum_{i=1}^{k} x_i p_i$ (2)

Отметим, что в случае интервального статистического ряда в равенстве в качестве xi берут середины интервалов, а n_i - соответствующие им частоты.

Выборочной дисперсией $D_в$ называется среднее арифметическое квадратов отклонений значений выборки от выборочной средней $\overline{x_в}$, т.е.

$D_В = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_в})^2 n_i$(3)

Или то же самое

$D_В = \sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_в})^2 P_i$ (4)

Можно показать, что дисперсия может быть посчитана по формуле:

$D_в = \overline{x^2} - (\bar{x})^2$ (5)

Здесь

$\bar{x} = \overline{x_в}$

$\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 n_i = \sum_{i=1}^{k} {x_i}^2 p_i$ (6)

Выборочное среднее квадратическое отклонение выборки определяется формулой

$\sigma_в = \sqrt{D_в}$ (7)

Особенность выборочного СКО состоит в том, что оно измеряется в тех же единицах. Что и изучаемый признак.

При решении практических задач помимо использования формул для расчета выборочной дисперсии используется величина, которая называется исправленной выборочной дисперсией. Дело в том, что значение выборочной дисперсии дает заниженные значения по отношению к действительной дисперсии, поэтому при малых выборках (n < 30) необходимо применять исправленную дисперсию и среднее квадратическое отклонение.

Эти значения находятся по формулам 8-9

$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_в})^2 n_i$ (8)

$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в$(9)

$S = \sqrt{S^2}$

В качестве описательных характеристик вариационного ряда используется медиана, мода и размах.

Размахом вариации называется число R = Xmax – Xmin, (10)

где X*max* - наибольший из вариант, X*min* - наименьший из вариант.

Модой M_0 вариационного ряда называется вариант, имеющий наибольшую частоту.

Медианой M_e вариационного ряда называется значение признака, приходящегося на середину ряда.

Если объем выборки n – четное число, то $M_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$, где $k = \frac{n}{2}$ (11)

Если объем выборки нечетное число, то $M_e = x_{k+1}$, где $k = \frac{n-1}{2}$

2. Типовые задания

Пример 1. Для примера 1 из предыдущей лекции найти характеристики выборки результатов тестирования 10 абитуриентов:

>Используя формулы 1 - 11 получаем:

Среднее значение балла

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{10} \cdot (0 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3) = 3$$

Выборочная дисперсия

$$\overline{x_{\text{в}}^{\,2}} = \frac{1}{10} \cdot (0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 1 + 3^2 \cdot 1 + 4^2 \cdot 2 + 5^2 \cdot 3) = 12{,}2$$

$$D_e = 12{,}2 - 3^2 = 3{,}2$$

Среднее квадратическое отклонение выборки:

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{3{,}2} \approx 1{,}79$$

Исправленная дисперсия

$$S^2 = \frac{10}{9} \cdot 3{,}2 \approx 3{,}56$$

Исправленное среднее квадратичное отклонение

$$S = \sqrt{3{,}56} \approx 1{,}87$$

Размах R = 5 – 0 = 5.

Мода M_0= 5.

Медиана $M_e = \frac{3+4}{2} = 3{,}5$

Пример 2.

Для примера 2 из предыдущей лекции найдите числовые характеристики интервального ряда, построенного в примере.

>Используя формулы 1 - 11 получаем:

Среднее значение роста

$$\bar{x}_{\text{в}} = \frac{1}{30} \cdot (153 \cdot 4 + 159 \cdot 5 + 165 \cdot 6 + 171 \cdot 5 + 183 \cdot 3) = 167{,}6$$

Выборочная дисперсия

$$\overline{x_{\text{в}}^{\,2}} = \frac{1}{30} \cdot (153^2 \cdot 4 + 159^2 \cdot 5 + 165^2 \cdot 6 + 171^2 \cdot 5 + 183^2 \cdot 3) = 28173$$

$$D_e = 28173 - 167{,}6^2 = 83{,}24$$

Среднее квадратическое отклонение выборки:

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{83{,}24} \approx 9{,}12$$

Исправленная дисперсия

$$S^2 = \frac{30}{29} \cdot 83{,}24 \approx 86{,}11$$

Исправленное среднее квадратичное отклонение

$$S = \sqrt{86{,}11} \approx 9{,}28$$

Размах, мода и медиана определяются только для дискретных рядов.

3. Задания

Вариант 1

Задача 1.

Дан следующий вариационный ряд

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	2	4	4	4	5	5	5

Требуется

Построить полигон распределения

Вычислить выборочную среднюю, дисперсию, моду, медиану.

Построить выборочную функцию распределения

Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

Задача 2.

Проведено выборочное обследование магазинов города. Имеются следующие данные о величине товарооборота для 50 магазинов города (x_i – товарооборот, млн. руб.; n_i – число магазинов).

x_i	25-75	75-125	125-175	175-225	225-275	275-325
n_i	12	15	9	7	4	3

Найти

а) среднее, среднее квадратическое отклонение S и коэффициент V;

б) построить гистограмму и полигон частот.

Задача 3.

Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n. Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, коэффициент вариации, моду и медиану.

10,5 11 11,5 12 12,5 13 13,5

2 18 40 25 6 5 4

Задача 4.

Дана выборка. Требуется:

а) Построить статистический ряд распределения частот и полигон частот;

б) Вариационный ряд;

в) Найти оценки математического ожидания и дисперсии;

г) Найти выборочные моду, медиану, коэффициент вариации, коэффициент асимметрии.

10,20,20,5,15,20,5,10,20,5.

Вариант 2

Задача 1.

Дан следующий вариационный ряд

1	1	3	3	2	6	7	2	9	11
2	5	5	2	6	4	4	5	5	5

Требуется

Построить полигон распределения

Вычислить выборочную среднюю, дисперсию, моду, медиану.

Построить выборочную функцию распределения

Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

Задача 2.

Проведено выборочное обследование магазинов города. Имеются следующие данные о величине товарооборота для 50 магазинов города (x_i – товарооборот, млн. руб.; n_i – число магазинов).

x_i	15-65	65-115	115-165	165-215	215-265	265-315
n_i	11	10	15	7	4	3

Найти

а) среднее, среднее квадратическое отклонение S и коэффициент V;

б) построить гистограмму и полигон частот.

Задача 3.

Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n. Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, коэффициент вариации, моду и медиану.

10 11,5 12 12 13 13,5 20

2 18 30 25 6 5 4

Задача 4.

Дана выборка. Требуется:

а) Построить статистический ряд распределения частот и полигон частот;

б) Вариационный ряд;

в) Найти оценки математического ожидания и дисперсии;

г) Найти выборочные моду, медиану, коэффициент вариации, коэффициент асимметрии.

15, 20, 20, 5, 15, 25, 5, 15, 20, 5.

Вариант 3

Задача 1.

Дан следующий вариационный ряд

3	2	3	1	3	6	5	8	9	3
6	1	5	2	4	3	4	2	5	5

Требуется

Построить полигон распределения

Вычислить выборочную среднюю, дисперсию, моду, медиану.

Построить выборочную функцию распределения

Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

Задача 2.

Проведено выборочное обследование магазинов города. Имеются следующие данные о величине товарооборота для 50 магазинов города (x_i – товарооборот, млн. руб.; n_i – число магазинов).

x_i	20-70	70-120	120-170	170-220	220-270	270-320
n_i	11	15	9	6	5	4

Найти

а) среднее, среднее квадратическое отклонение S и коэффициент V;

б) построить гистограмму и полигон частот.

Задача 3.

Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n. Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, коэффициент вариации, моду и медиану.

12 10 11,5 12 12,5 14 14,5

2 18 20 25 6 5 4

Задача 4.

Дана выборка. Требуется:

а) Построить статистический ряд распределения частот и полигон частот;

б) Вариационный ряд;

в) Найти оценки математического ожидания и дисперсии;

г) Найти выборочные моду, медиану, коэффициент вариации, коэффициент асимметрии.

5, 20, 25, 5, 10, 20, 5,15, 20, 5.

Вариант 4

Задача 1.

Дан следующий вариационный ряд

6	2	3	5	4	1	7	8	4	1
1	10	2	7	4	4	4	5	2	5

Требуется

Построить полигон распределения

Вычислить выборочную среднюю, дисперсию, моду, медиану.

Построить выборочную функцию распределения

Найти несмещенные оценки математического ожидания и дисперсии.

Задача 2.
Проведено выборочное обследование магазинов города. Имеются следующие данные о величине товарооборота для 50 магазинов города (x_i – товарооборот, млн. руб.; n_i – число магазинов).

x_i	35-85	85-135	135-185	185-235	235-285	285-335
n_i	12	15	9	7	4	3

Найти
а) среднее, среднее квадратическое отклонение S и коэффициент V;
б) построить гистограмму и полигон частот.

Задача 3.
Из генеральной совокупности извлечена выборка объема n. Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию, выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную выборочную дисперсию, коэффициент вариации, моду и медиану.
11,5 11 10 11 12,5 13 13,5, 11
2 18 4 15 6 5 3

Задача 4.
Дана выборка. Требуется:
а) Построить статистический ряд распределения частот и полигон частот;
б) Вариационный ряд;
в) Найти оценки математического ожидания и дисперсии;
г) Найти выборочные моду, медиану, коэффициент вариации, коэффициент асимметрии.
1, 10, 20, 1, 15, 20, 1, 10, 20, 1.

Требования к оформлению отчетного материала: оформленное решение задач в тетради.
Форма контроля: фронтальный опрос, проверка тетрадей.
Ссылки на источники: [1], [3]
Критерии оценки: указаны во введении.